Maria das Neves Vieiro Rebocho

POLINÓMIOS ORTOGONAIS DO TIPO LAGUERRE-HAHN SOBRE A CIRCUNFERÊNCIA UNITÁRIA

Departamento de Matemática
Faculdade de Ciências e Tecnologia
Universidade de Coimbra
2008

Dissertação submetida para obtenção do grau de Doutor em Matemática, área de especialização em Matemática Pura, na Universidade de Coimbra.

Para os meus pais.

Para o meu Dom Quixote.

Resumo

Neste trabalho temos como objectivo dar um contributo à análise de propriedades diferenciais de famílias de polinómios ortogonais sobre a circunferência unitária. Em particular, centramos o nossso estudo nas famílias de polinómios ortogonais sobre a circunferência unitária e respectivas funcionais de ortogonalidade cujas funções de Carathéodory, F, verificam equações diferenciais de Riccati com coeficientes polinomiais, $zAF' = BF^2 + CF + D$. Designemos o conjunto das funcionais deste tipo (equivalentemente, o conjunto das sucessões de polinómios ortogonais relativamente a uma funcional deste tipo) de *classe Laguerre-Hahn sobre a circunferência unitária.*

Apresentaremos caracterizações da classe Laguerre-Hahn sobre a circunferência unitária em termos de:
- uma equação distribucional para a funcional de ortogonalidade (cf. cap. II);
- relações de estrutura de primeira ordem de coeficientes polinomiais (cf. cap. III);
- equações diferenciais vectoriais de segunda ordem (cf. cap. III);
- equações diferenciais matriciais de Sylvester (cf. cap. IV).
Além disso, obteremos uma representação para sucessões de polinómios Laguerre-Hahn sobre a circunferência unitária em termos de famílias semi-clássicas sobre a circunferência unitária (cf. cap. IV).

Palavras-chave: polinómios ortogonais, funcionais lineares hermitianas, medidas suportadas sobre a circunferência unitária, funções de Carathéodory, classe semi-clássica sobre a circunferência unitária, classe Laguerre-Hahn afim sobre a circunferência unitária, equações diferenciais matriciais de Riccati, equações diferenciais matriciais de Sylvester.

Abstract

In this work we aim at giving a contribution to the analysis of differential properties of families of orthogonal polynomials on the unit circle. We focus our study on the families of orthogonal polynomials on the unit circle and corresponding functionals whose Carthéodory functions, F, satisfy Riccati differential equations with polynomial coefficients, $zAF' = BF^2 + CF + D$. We shall call the set of such functionals (equivalently, the sequences of polynomials orthogonal with respect to functionals of this kind) the *Laguerre-Hahn class on the unit circle.*

We will give characterizations of the Laguerre-Hahn class on the unit circle in terms of:
- a distributional equation to the functional of orthogonality (cf. chapter II);
- first order structure relations with polynomial coefficients (cf. chapter III);
- second order differential equations (cf. chapter III);
- matrix Sylvester differential equations (cf. chapter IV).

Moreover, we will obtain a representation of sequences of Laguerre-Hahn polynomials on the unit circle in terms of semi-classical families on the unit circle (cf. chapter IV).

Key words: orthogonal polynomials, Hermitian linear functionals, measures on the unit circle, Carathéodory functions, semi-classical class on the unit circle, Laguerre-Hahn class on the unit circle, matrix Riccati differential equations, matrix Sylvester differential equations.

Agradecimentos

Quero aqui expressar a minha gratidão ao Professor Amílcar Branquinho, mentor do projecto que por agora terminou com a escrita desta dissertação.

Foi graças ao Professor Amílcar Branquinho que comecei a estudar temas de Polinómios Ortogonais. Ainda na licenciatura, frequentei, a nível extracurricular, sob sua indicação, um curso acerca de polinómios ortogonais sobre a circunferência unitária, no Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra. Desde o final da licenciatura tem acompanhado o meu trabalho de investigação: no mestrado, com a orientação de uma dissertação onde se trataram temas de Problemas de Momentos e Polinómios Ortogonais e, desde então, no doutoramento.

O Professor Amílcar Branquinho teve um papel essencial na elaboração dos textos preparatórios dos trabalhos que aqui apresentamos, incentivando-me para a melhoria dos resultados que iam sendo obtidos, e sempre mostrando um grande empenho e um grande entusiasmo.

Por tudo isto estou-lhe muito agradecida.

Agradeço ao Eduardo, por *tudo*.

Parte da investigação que conduziu a esta dissertação foi financiada pelo Programa Operacional da Ciência e Inovação 2010 e do Fundo Social Europeu através de uma bolsa de investigação de doutoramento (SFRH/BD/25426/2005) concedida pela Fundação para a Ciência e Tecnologia do Ministério da Ciência, Tecnologia e Ensino Superior do Governo da República Portuguesa.

ÍNDICE GERAL

Introdução

Enquadramento da dissertação e principais resultados obtidos

Esta dissertação enquadra-se na temática da teoria geral de polinómios ortogonais sobre a circunferência unitária.

Segundo os autores de [**2**], historicamente, a teoria de polinómios ortogonais sobre a circunferência unitária está ligada à Análise de Fourier e à teoria de funções analíticas positivas (ver [**16, 26, 62**]). Nas duas últimas décadas tem-se verificado um amplo interesse pelo estudo de temas da teoria geral de polinómios ortogonais sobre a circunferência unitária, dos quais destacamos: relações de recorrência de Szegő, medidas de probabilidade sobre a circunferência unitária, funções de Carathéodory, funções de Schur, matrizes hermitianas de Toeplitz, fracções contínuas do tipo Perron-Carathéodory (ver [**33, 57, 58**] e as referências aí indicadas). Estes e outros temas da Teoria de Polinómios Ortogonais Sobre a Circunferência Unitária têm aplicações em diversos campos da Matemática tais como a Teoria da Aproximação, a Teoria de Operadores, a Teoria de Probabilidades, a Teoria de Processamento Digital de Sinal (ver [**33, 39, 57, 58**] e as referências nelas contidas) e, mais recentemente, em Problemas de Riemann--Hilbert (ver [**6, 48**]).

O estudo que apresentamos nesta dissertação incide sobre funções de Carathéodory que verificam equações diferenciais do tipo Riccati com coeficientes polinomiais

$$zAF' = BF^2 + CF + D\,. \tag{1}$$

No sentido lato, designemos o conjunto de tais funções de Carathéodory de classe Laguerre-Hahn sobre a circunferência unitária.

Começamos por observar que existe uma bijecção entre a família das funções de Carathéodory e a família das medidas suportadas sobre a circunferência unitária (cf. [**57**, pg. 29]), sendo que uma função de Carathéodory F tem uma representação integral em termos de uma medida de Borel positiva μ,

$$F(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\xi + z}{\xi - z}\, d\mu(\theta), \quad \xi = e^{i\theta}.$$

Dada uma tal medida μ, defina-se uma funcional linear no espaço dos polinómios de Laurent por $\langle u, z^{-n} \rangle = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} z^{-n} d\mu(\theta), \ z = e^{i\theta}, \ n \in \mathbb{Z}$. A sucessão de polinómios ortogonais relativamente a μ (equivalentemente, relativamente à funcional u), $\{\phi_n\}$, é definida por

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \phi_n(z) \overline{\phi}_k(1/z) d\mu(\theta) = K_n \delta_{n,k}, \ z = e^{i\theta}, \ K_n > 0, \ \ \forall n, k \geq 0\,.$$

Considere-se ainda que cada ϕ_n é mónico, ou seja, $\phi_n = z^n +$ termos de grau inferior. A sucessão $\{\phi_n\}$ verifica as relações de recorrência de Szegő, para $n \geq 1$,

$$\begin{cases} \phi_n(z) = z\phi_{n-1}(z) + a_n \phi^*_{n-1}(z) \\ \phi^*_n(z) = \phi^*_{n-1}(z) + \overline{a}_n z \phi_{n-1}(z)\,, \end{cases} \tag{2}$$

onde ϕ^*_n é definido por $\phi^*_n(z) = z^n \overline{\phi}_n(1/z), \ n \geq 0, \ \phi_0(z) = \phi^*_0(z) = 1, \ \phi_{-1}(z) = \phi^*_{-1}(z) = 0$, e $a_n = \phi_n(0)$ verificam $|a_n| < 1, \ \forall n \geq 1$. Por outro lado, o resultado recíproco também é válido, ou seja, dada uma sucessão de números complexos (a_n) tal que $|a_n| < 1, \ \forall n \geq 1$, os polinómios definidos por (2) são ortogonais relativamente a uma única medida μ (cf. teorema de Favard, [**17, 22**]). Consequentemente, a teoria de polinómios ortogonais sobre a circunferência unitária também pode ser vista como a teoria de equações vectoriais às diferenças de primeira ordem,

$$Y_n = \mathcal{A}_n Y_{n-1}, \ Y_n = \begin{bmatrix} \phi_n \\ \phi^*_n \end{bmatrix}, \ \mathcal{A}_n = \begin{bmatrix} z & a_n \\ \overline{a}_n z & 1 \end{bmatrix}, \ n \geq 1\,, \tag{3}$$

sendo (a_n) uma sucessão de números arbitrários tais que $|a_n| < 1, \ \forall n \geq 1$. Esta abordagem foi seguida por Golinskii e Nevai em [**25**], no estudo de relações entre as matrizes $\mathcal{A}_n$ e a estrutura de medidas de ortogonalidade. Em [**25**] obteve-se

$$F(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{\Omega^*_n(z)}{\phi^*_n(z)}\,, \quad |z| < 1\,, \tag{4}$$

onde $\{\Omega_n\}$ é a sucessão dos polinómios associados de primeira espécie (cf. secção I.4) ((4) foi também estabelecido por Geronimus, em [**22**], ao estudar a teoria de polinómios ortogonais sobre a circunferência unitária e a sua ligação com fracções contínuas, na resolução do problema de momentos trigonométrico (ver [**54**])). Além disso, a utilização das equações matriciais (3) permite-nos, por exemplo, obter explicitamente a função de Carathéodory associada à medida que corresponde a uma transformação nos parâmetros a_n, do tipo $a_n \mapsto \lambda a_n$, com $|\lambda| = 1$, ou do tipo $a_n \mapsto a_{n+N}$, com $N \in \mathbb{N}$, e que denotamos, respectivamente, por $\mu(\lambda a_n)$ e $\mu(a_{n+N})$. As medidas $\mu(\lambda a_n)$ são conhecidas na literatura como medidas de Aleksandrov. Este tipo de medidas surge na teoria de funções analíticas no disco unitário, e são medidas espectrais de operadores auto-adjuntos (ver [**56, 57, 58**]). As medidas $\mu(a_{n+N})$ foram estudadas por Peherstorfer em [**50**]. Sendo F a função de Carathéodory associada à medida $\mu(a_n)$, veremos que a função de Carathéodory associada à medida de Aleksandrov $\mu(\lambda a_n)$, F_λ, e que a função de Carathéodory associada à medida $\mu(a_{n+N})$, F^N, são funções racionais de F dadas por

$$F_\lambda(z) = \frac{(\lambda-1)+(1+\lambda)F}{(1+\lambda)+(\lambda-1)F}\,, \tag{5}$$

$$F^N = \frac{(\Omega_N-\Omega_N^*)+(\phi_N+\phi_N^*)F}{(\Omega_N+\Omega_N^*)+(\phi_N-\phi_N^*)F}\,, \tag{6}$$

onde $\{\phi_n\}$ é a sucessão dos polinómios ortogonais mónicos relativamente a $\mu(a_n)$ e $\{\Omega_n\}$ a sucessão dos polinómios associados de primeira espécie. Obteremos também uma representação para as respectivas sucessões de polinómios ortogonais (cf. secções I.7 e I.8).

Voltemos à classe Laguerre-Hahn sobre a circunferência unitária. Esta classe pode ser vista, por um lado, como uma extensão da classe Laguerre-Hahn sobre a recta real e, por outro, como uma extensão das classes semi-clássica e Laguerre--Hahn afim sobre a circunferência unitária.

No caso de ortogonalidade sobre subconjuntos da recta real a classe Laguerre--Hahn foi, em grande medida, estudada por Hahn, Maroni, Magnus, Marcellán e co-autores (ver [**20, 28, 29, 35, 41, 42, 44, 45, 46, 47**]). Neste caso, a classe Laguerre-Hahn foi definida em termos de uma equação diferencial de Riccati para a função formal de Stieltjes; quando o factor quadrático é nulo obtemos a classe semi-clássica (equivalentemente, a classe Laguerre-Hahn afim, pois estas duas classes coincidem (cf. [**45**])), definida em termos de uma equação diferencial linear de primeira ordem com coeficientes polinomiais para a função formal de Stieltjes, S, $AS' = CS + D$. Por sua vez, esta equação é equivalente a uma equação de Pearson para a respectiva funcional de ortogonalidade, u, definida no espaço dos polinómios reais de variável real, $\mathcal{D}(Au) + C_1 u = 0$ onde $\mathcal{D}$ é o operador de derivação e C_1 é um polinómio que depende de A e C. A classe semi--clássica sobre a recta real é caracterizada em termos de relações diferenciais com coeficientes polinomiais para as respectivas sucessões de polinómios ortogonais, $\{P_n\}$, conhecidas na literatura como relações de estrutura (ver [**44, 45, 46**]), $AP_n' = E_n P_n + D_n P_{n+1},\ n \geq 1$, e em termos de equações diferenciais lineares de segunda ordem com coeficientes polinomiais (ver [**28, 29**]), $A_n P_n'' + B_n P_n' + C_n P_n = 0,\ n \geq 1$; em particular, se A_n e B_n não dependerem de n, surgem as sucessões de polinómios ortogonais clássicos, ou seja, Jacobi, Laguerre, Hermite e Bessel.

Ainda no caso de ortogonalidade real, destacamos o trabalho de Magnus [**36**] acerca de modificações (via um parâmetro) de pesos/medidas semi-clássicas sobre subconjuntos da recta real. Em [**36**] as sucessões de polinómios ortogonais relativamente a este tipo de medidas são caracterizadas por equações diferenciais do tipo Painlevé verificadas pelos respectivos coeficientes da relação de recorrência. Magnus começou por deduzir sistemas diferenciais para sucessões semi-clássicas sobre subconjuntos de $\mathbb{R}$: se $\{P_n\}$ for ortogonal relativamente a uma função de Stieltjes S que verifica $AS' = CS + D$, e cuja função peso da respectiva medida é w, então, para $n \geq 2$,

$$AY' = \begin{bmatrix} U_n - C/2 & \Theta_n \\ \Theta_{n-1} & -U_n - C/2 \end{bmatrix} Y, \quad Y = \begin{bmatrix} P_n & \varepsilon_n/w \\ P_{n-1} & \varepsilon_{n-1}/w \end{bmatrix}, \tag{7}$$

sendo $\{\varepsilon_n\}$ a sucessão das funções de segunda espécie, e U_n, Θ_n polinómios com graus independentes de n. Estes sistemas diferenciais têm a propriedade de Painlevé: as singularidades móveis do sistema (ou seja, as singularidades que dependem de cada uma das soluções) são pólos (cf. [**18**]). Ao considerar o caso de as singularidades do sistema (7), ou seja, os zeros do polinómio A, dependerem de um parâmetro t, Magnus obteve equações de Painlevé (P-IV) e transformações de Schlesinger para os coeficientes da relação de recorrência de $\{P_n\}$; em particular, obteve este tipo de equações para os coeficientes de sucessões de polinómios ortogonais relativamente a pesos tipo Freud, $w(z,t) = e^{-x^2/4-tx^2}$ (ver também [**5**]).

No caso de ortogonalidade sobre a circunferência unitária a classe semi-clássica e a classe Laguerre-Hahn afim foram, em grande medida, estudadas por Marcellán e Tasis em [**39, 61**], e por Cachafeiro e Pérez em [**15, 52**] (ver também o trabalho de Suárez, [**59**]).

Em [**39, 61**] foi apresentada, pela primeira vez, a definição de funcional hermitiana semi-clássica; uma funcional linear u hermitiana e regular definida no espaço linear dos polinómios de Laurent foi designada por semi-clássica se existirem polinómios A, C tais que u verifica uma equação de Pearson $\mathcal{D}(Au) = Cu$ ($\mathcal{D}$ é o operador de derivação, definido em II.1), e as respectivas sucessões de polinómios ortogonais foram designadas por semi-clássicas. Além disso, mostrou-se que se u for uma funcional linear hermitiana verificando $\mathcal{D}(Au) = Cu$, então:
i) a função de Carathéodory associada a u verifica $zAF' = (-iC - zA')F + D$, sendo D um polinómio específico que depende de A, C.
ii) a respectiva sucessão de polinómios ortogonais, $\{\phi_n\}$, verifica relações de estrutura de coeficientes polinomiais de graus independentes de n, $zA\phi_n' = G_n\phi_n + H_n\phi_n^*$, $n \geq 1$, e $\{\phi_n\}$ verifica $A_n\phi_n'' + B_n\phi_n' + C_n\phi_n = 0$, $n \geq 1$, onde A_n, B_n, C_n são polinómios de graus independentes de n.
Desde então têm sido publicados trabalhos onde se estabelecem propriedades da classe semi-clássica sobre a circunferência unitária análogas às estabelecidas para o caso real, por exemplo, [**2, 3, 9, 10, 14, 15, 21, 43**], mas os resultados recíprocos de ii) permanecem em aberto.

Em [**15, 52**] a classe Laguerre-Hahn afim sobre a circunferência unitária foi definida em termos de uma equação diferencial de primeira ordem com coeficientes polinomiais para a série formal $G(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n z^n$ (c_n são os momentos de uma funcional linear hermitiana u),

$$A(z)G'(z) = C_1(z)G(z) + H(z)\,. \tag{8}$$

É estabelecida a equivalência entre (8) e uma equação distribucional para a respectiva funcional u, $\mathcal{D}(Au) = Cu + zH\mathcal{L}_0$, onde $\mathcal{L}_0$ é a funcional de Lebesgue na circunferência e C é um polinómio que depende de A e C_1. Além disso, são obtidas condições sobre os coeficientes de (8) e sobre os coeficientes de uma equação diferencial linear para a respectiva função de Carathéodory, F, $zAF' = C_1F + D$, com A, C_1, D polinómios, de modo a estabelecer o carácter semi-clássico da respectiva funcional u. São dados exemplos de funções de Carathéodory que verificam equações deste tipo e cujas funcionais não são semi-clássicas, mostrando-se assim que no caso da circunferência unitária a classe Laguerre-Hahn afim não coincide com a classe semi-clássica.

Destacamos ainda o trabalho de Ismail e Witte [**31**], onde foram estudadas transformações análogas às de [**36**], mas agora relativamente a pesos sobre a circunferência unitária. Os autores começaram por deduzir equações diferenciais com coeficientes analíticos para sucessões de polinómios ortogonais (ortonormados) sobre a circunferência unitária, $\{\varphi_n\}$,

$$\varphi_n''(z) + M(n,z)\varphi_n'(z) + N(n,z)\varphi_n(z) = 0\,, \tag{9}$$

sendo que para tal foram determinados operadores $L_{n,1}$ e $L_{n,2}$, $L_{n,1} = \frac{d}{dz} + U_n$, $L_{n,2} = -\frac{d}{dz} - U_{n-1} + V_n$, com U_n, V_n funções analíticas, e tais que

$$L_{n,2}\left(\frac{1}{Z_n}L_{n,1}\right)\varphi_n(z) = \frac{Z_{n-1}}{z}\gamma_n\varphi_n(z)\,,$$

com Z_n funções analíticas e $\gamma_n \in \mathbb{C}$, $\forall n \geq 1$. A partir da identificação de certos coeficientes nas equações (9) obtiveram-se relações para $a_n = \varphi_n(0)$, e, consequentemente, equações do tipo Freud e tipo Painlevé. Em particular considerou-se o peso (semi-clássico) modificado de Bessel sobre a circunferência unitária, $w(z,t) = \frac{1}{2\pi I_0(t)}e^{\frac{1}{2}(z+z^{-1})}$, onde I_0 é a função de Bessel modificada, e estabeleceram-se equações diferenciais de Painlevé para os respectivos coeficientes a_n (agora $a_n(t)$) e também para $r_n(t) = a_n(t)/k_n(t)$, sendo $\varphi_n(z,t) = k_n(t)z^n + \cdots$.

No sentido lato, a classe Laguerre-Hahn sobre a circunferência unitária por nós definida contém as classes referidas anteriormente: se $B = 0$ em (1), temos a classe Laguerre-Hahn afim sobre a circunferência unitária; se $B = 0$ e C, D forem polinómios específicos em (1), temos a classe semi-clássica sobre a circunferência unitária. A classe Laguerre-Hahn sobre a circunferência unitária também contém a classe de funcionais de segundo grau sobre a circunferência unitária (ver [**14**]) e as transformações do tipo racional-linear de funções de Carathéodory na classe Laguerre-Hahn (cf. [**11**]). Em particular, a classe Laguerre-Hahn é fechada para transformações associadas a medidas de Aleksandrov, ou seja, do tipo (5); também é fechada para transformações do tipo (6).

Nesta dissertação, o nosso principal objectivo é o de apresentar caracterizações da classe Laguerre-Hahn, em termos de relações diferenciais, e obter uma representação para as respectivas sucessões de polinómios ortogonais. Salientamos desde já que as sucessões semi-clássicas têm um um papel fundamental, pois a representação de sucessões de polinómios ortogonais Laguerre-Hahn que obteremos no capítulo IV é dada em termos de sucessões semi-clássicas.

Vejamos, de modo resumido, quais os principais resultados desta dissertação.

No capítulo II estabelecemos a equivalência entre a equação (1) e uma equação distribucional para a respectiva funcional u, $\mathcal{D}(Au) = B_1u^2 + C_1u + H_1\mathcal{L}_0$, onde B_1, C_1, H_1 são polinómios definidos em termos de A, B, C, D e $\mathcal{L}_0$ é a funcional de Lebesgue sobre a circunferência unitária. Deste modo, obtemos os resultados análogos aos estabelecidos por Maroni em [**45**] no caso de ortogonalidade sobre subconjuntos de $\mathbb{R}$.

No capítulo III focamos a nossa atenção na caracterização da classe Laguerre-Hahn sobre a circunferência unitária em termos de relações de estrutura de primeira ordem e em termos de equações diferenciais de segunda ordem. As caracterizações que aqui apresentamos foram essencialmente motivadas pelos trabalhos de Hahn [**28, 29**], onde se caracteriza a classe semi-clássica no caso real através de equações diferenciais de segunda ordem de coeficientes polinomiais. Dada uma função de Carathéodory F, sejam $\{\phi_n\}$, $\{\Omega_n\}$ e $\{Q_n\}$, respectivamente, a sucessão dos polinómios ortogonais mónicos, a sucessão dos polinómios associados de primeira espécie e a sucessão das funções de segunda espécie relativamente a F, e considerem-se os vectores $\psi_n^1 = [\phi_n \ -\Omega_n]^T$, $\psi_n^2 = [\phi_n^* \ \Omega_n^*]^T$, $n \geq 1$. Mostramos que F verifica $zAF' = BF^2 + CF + D$ se, e somente se, $\{\psi_n^1\}$ e $\{Q_n\}$ verificam, para $n \geq 1$, as relações de estrutura

$$\begin{cases} zA(\psi_n^1)' = M_{n,1}\psi_n^1 + N_{n,1}\psi_n^2 \\ zAQ_n' = (l_{n,1} + C/2 + BF)Q_n + \Theta_{n,1}Q_n^* , \end{cases} \tag{10}$$

onde $M_{n,1}, N_{n,1}$ são matrizes de ordem dois de elementos polinomiais de graus independentes de n, e $l_{n,1}, \Theta_{n,1}$ polinómios de graus independentes de n (cf. teorema III.1). Esta equivalência é um resultado central no nosso trabalho pois, por um lado, as equações (10) serão reinterpretadas, no capítulo IV, em termos de equações matriciais de Sylvester, e tal permitir-nos-á obter uma representação para a respectiva sucessão de polinómios ortogonais; por outro lado, tendo em atenção as equações (10), vemos que as equações diferenciais que surgem *naturalmente* na classe Laguerre-Hahn sobre a circunferência unitária são equações diferenciais de ordem dois para $\{\psi_n^1\}$ e para $\{Q_n\}$. Assim, mostramos a equivalência entre $zAF' = BF^2 + CF + D$ e as equações vectoriais de segunda ordem, para $n \geq 1$,

$$\begin{cases} \tilde{\mathcal{A}}_{n,1}\, I(\psi_n^1)'' + \mathcal{B}_{n,1}(\psi_n^1)' + \mathcal{C}_{n,1}(\psi_n^1) = 0_{2\times 1} \\ \tilde{\mathcal{A}}_{n,1}(Q_n)'' + \tilde{\mathcal{B}}_{n,1}Q_n' + \tilde{\mathcal{C}}_{n,1}Q_n = 0\,, \end{cases}$$

onde $\mathcal{B}_{n,1}, \mathcal{C}_{n,1}$ são matrizes de ordem dois de elementos polinomiais, $\tilde{\mathcal{B}}_{n,1}, \tilde{\mathcal{C}}_{n,1}$ são funções analíticas no disco unitário, $\tilde{\mathcal{A}}_{n,1}$ é um polinómio e I é a matriz identidade de ordem dois (cf. teorema III.2).

No capítulo IV establelecemos a ligação entre a classe Laguerre-Hahn sobre a circunferência unitária (no sentido lato) e a teoria de equações diferenciais matriciais de Sylvester. Tal como já referimos, reinterpretamos as equações (10) obtidas no capítulo III, o que nos permite estabelecer a equivalência entre $zAF' = BF^2+CF+D$ e dois sistemas de equações matriciais de Sylvester para as sucessões $\{Y_n\}$ e $\{\mathcal{Q}_n\}$, sendo $Y_n = \begin{bmatrix} \phi_n & -\Omega_n \\ \phi_n^* & \Omega_n^* \end{bmatrix}$, $\mathcal{Q}_n = \begin{bmatrix} -Q_n \\ Q_n^* \end{bmatrix}$, $n \geq 1$,

$$zAY_n' = \mathcal{B}_n Y_n - Y_n \mathcal{C}\,, \tag{11}$$

$$zA\mathcal{Q}_n' = (\mathcal{B}_n + BF + \frac{C}{2}\, I)\mathcal{Q}_n\,,$$

com $\mathcal{B}_n$ matrizes de entradas polinomiais de graus independentes de n e $\mathcal{C}$ dada por $\mathcal{C} = \begin{bmatrix} C/2 & -D \\ B & -C/2 \end{bmatrix}$. Além disso, utilizando as relações de recorrência de Szegő na forma matricial (3), deduzimos equações diferenciais de Sylvester para as matrizes $\mathcal{A}_n$, $zA\mathcal{A}_n' = \mathcal{B}_n\mathcal{A}_n - \mathcal{A}_n\mathcal{B}_{n-1}$, $n \geq 1$. Estas relações são análogas às equações obtidas por Ismail e Witte em [**31**], no caso da ortogonalidade sobre a circunferência, e às equações deduzidas por Magnus em [**36**], no caso de ortogonalidade sobre subconjuntos de $\mathbb{R}$. Como consequência das equações anteriores, estabelecemos a seguinte caracterização para sucessões de polinómios ortogonais sobre a circunferência pertencentes à classe semi-clássica: se $\{\phi_n\}$ for uma sucessão de polinómios ortogonais mónicos relativamente a uma medida (associada a um peso w), então uma condição necessária e suficiente para que $\{\phi_n\}$ seja semi-clássica é a sucessão dada por $\tilde{Y}_n = \begin{bmatrix} \phi_n & -Q_n/w \\ \phi_n^* & Q_n^*/w \end{bmatrix}, n \geq 1$, verificar sistemas diferenciais do tipo Sylvester

$$zA\tilde{Y}_n' = B_n\tilde{Y}_n, \quad B_n \in M^{2\times 2}(\mathbb{P}), \quad \text{com } \operatorname{tr}(B_n) = nA\,. \tag{12}$$

Obtemos assim uma extensão do resultado de Magnus publicado em [**36**], acerca de sucessões semi-clássicas na recta real. Por outro lado, aplicando o Lema de Radon (cf. [**32, 53**]), obtemos que a solução da equação de Sylvester (11) é dada por $Y_n = \mathcal{P}_n\,\mathcal{L}^{-1}\,,\ \forall n \geq 1\,,$ onde $\mathcal{P}_n$ e $\mathcal{L}$ verificam, respectivamente,

$$\begin{cases} zA(z)\mathcal{L}'(z) = \mathcal{C}(z)\mathcal{L}(z) \\ \mathcal{L}(z_0) = I \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} zA(z)\mathcal{P}_n'(z) = \mathcal{B}_n(z)\mathcal{P}_n(z) \\ \mathcal{P}_n(z_0) = Y_n(z_0)\,, \quad n \geq 1\,. \end{cases}$$

Tendo em atenção a caracterização de famílias semi-clássicas previamente obtida, mostraremos que um sistema fundamental de soluções do sistema anterior é dado por $P_n = e^{\int_{z_1}^{z} \frac{\tilde{C}}{tA}dt} \begin{bmatrix} \tilde{\phi}_n & -\tilde{Q}_n/\tilde{w} \\ (\tilde{\phi}_n)^* & (\tilde{Q}_n)^*/\tilde{w} \end{bmatrix}$, onde $\{\tilde{\phi}_n\}$ é uma sucessão de polinómios ortogonais relativamente a um peso semi-clássico $\tilde{w}$, $\{\tilde{Q}_n\}$ é a respectiva sucessão de funções de segunda espécie, e $\tilde{C}$ é um polinómio devidamente caracterizado. Assim, mostramos que F, verificando $zAF' = BF^2 + CF + D$, é uma transformação racional-linear de uma função de Carathéodory $\tilde{F}$ semi-clássica, sendo $\tilde{F}$ associada a $\tilde{w}$, e é obtida uma factorização para Y_n, para todo o $n \geq 1$, em termos de uma família semi-clássica (cf. teorema IV.8).

Notas prévias

Vejamos algumas notas acerca de temas de estudo referidos anteriormente.

Observemos que poderíamos ter considerado o sistema (12) sujeito a deformações do mesmo tipo que as consideradas em [**31**] e [**36**], e então fazer um estudo análogo aos estudos aí realizados. Mais: poder-se-ia considerar o mesmo tipo de deformações para a classe Laguerre-Hahn, tendo em atenção as equações de Sylvester (11) e a respectiva representação para Y_n, $Y_n = \mathcal{P}_n\,\mathcal{L}^{-1}$, $n \geq 1$. Não fomos tão longe, mas este tema fica proposto para um trabalho futuro.

Em [**9**] estendemos a noção de pares (de medidas) coerentes da recta real (ver [**30, 49**]) a arcos de Jordan e curvas do plano complexo. No caso da circunferência unitária obtemos que, dado um par coerente (μ_0, μ_1), a funcional linear associada a μ_1 é uma transformação racional específica da funcional linear associada a μ_0. Pode ver-se que as relações de estrutura com coeficientes polinomiais para sucessões de polinómios ortogonais sobre a circunferência unitária, assim como a "quase-ortogonalidade sobre a circunferência unitária", têm aqui um papel fundamental (cf. teoremas 3 e 4). Em particular, damos uma condição suficiente para o carácter semi-clássico de uma sucesssão de polinómios ortogonais mónicos sobre a circunferência unitária, $\{\phi_n\}$, que verifique, $\forall n \geq 1$,

$$\begin{aligned} zA(z)\phi_n'(z) &= G_n(z)\phi_n(z) + H_n(z)\phi_n^*(z) \\ zA(z)(\phi_n^*)'(z) &= S_n(z)\phi_n(z) + T_n(z)\phi_n^*(z)\,, \end{aligned}$$

onde G_n, H_n, S_n, T_n são polinómios de graus independentes de n. Note-se que estas relações de estrutura estão presentes na classe Laguerre-Hahn afim (cf. corolário III.1)).

O tema "quase-ortogonalidade" não foi por nós abordado nesta dissertação. Notemos que, comparativamente com o caso real, poucos trabalhos têm sido publicados respeitantes a este tema sobre a circunferência unitária (basta ter em atenção o capítulo I de [**8**] e as referências aí citadas, em contraposição com os trabalhos sobre a circunferência unitária, essencialmente [**3, 21, 40**]). Fica também proposto para trabalho futuro o estudo de relações de quase-ortogonalidade na classe Laguerre-Hahn sobre a circunferência unitária.

Notações e nomenclatura

Adoptámos o símbolo $\Box$ para indicar o final de uma demonstração. Na generalidade omitiremos a demonstração dos resultados já conhecidos na literatura (por exemplo, os resultados do capítulo I surgem, na sua maioria, sem demonstração). Nos casos em que desejemos evidenciar certas técnicas na demonstração de um resultado conhecido esta será apresentada, mas podendo acontecer que a demonstração apresentada não seja exactamente a mesma que se encontra na referência bibliográfica indicada; nestes casos, este facto será referido.

Representaremos as sucessões de números complexos por $(\cdot_n)$ (parêntesis curvos) e as sucessões de funções por $\{\cdot_n\}$ (chavetas).

Considere-se $\{\vartheta_n\}$ uma sucessão de funções, com $n \in \mathbb{N}$, e P uma propriedade. Geralmente, ao longo do texto (especialmente no capítulo III) escreveremos

$$\{\vartheta_n\} \textit{ verifica } P.$$

em vez de:

$$\vartheta_n \textit{ verifica } P\textit{, para todo o } n \in \mathbb{N}\,.$$

Designaremos por matriz escalar uma matriz do tipo $\alpha\, I$, onde α é um escalar e I é a matriz identidade.

Por domínio entendemos um conjunto aberto e conexo do plano complexo, $\mathbb{C}$.

Seguem-se algumas notações que utilizaremos ao longo do texto:

$\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ - disco unitário;

$\mathbb{N} = \{1, 2, ...\}$;

$\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$;

$\delta_{n,m} = \begin{cases} 1 \text{ se } n = m \\ 0 \text{ se } n \neq m\,; \end{cases}$

$\mathrm{adj}(X)$ - adjunta da matriz X;

$\mathcal{R}^+$ - conjunto das funcionais lineares hermitianas definidas positivas;

$\mathcal{R}$ - conjunto das funcionais lineares hermitianas regulares;

const - constante;

$\det(X)$ - determinante da matriz X;

$[\,X\,]_{i,j}$ - elemento da matriz X na posição $(i,j),\ i,j = 1,2$;

$M^{n\times m}(\mathbb{P})$ - espaço das matrizes tipo $n \times m$, de elementos polinomiais;

Λ' - espaço dual algébrico de Λ;

$\mathbb{P}$ - espaço vectorial dos polinómios de coeficientes complexos;

$\mathbb{P}_n$ - espaço vectorial dos poliómios de grau menor do que ou igual a n;

Λ - espaço vectorial dos polinómios de Laurent;

Γ - função Gamma;

$\mathcal{L}_0$ - funcional de Lebesgue sobre a circunferência;

J - matriz definida por $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$;

I - matriz identidade de ordem dois;

$\Re e(f)$ - parte real da função f;

SPOM - sucessão de polinómios ortogonais mónicos;

$\mathrm{tr}(X)$ - traço da matriz X;

$T_{(a,b;c,d)}$ - transformação do tipo racional-linear dada por $T(F) = \dfrac{a+bF}{c+dF}$.

CAPÍTULO I

Teoria geral de polinómios ortogonais sobre a circunferência unitária

Neste capítulo apresentamos os resultados básicos da teoria geral de polinómios ortogonais sobre a circunferência unitária que necessitaremos nos restantes capítulos. Os resultados que apresentamos nas secções 1 a 5 são, na sua maioria, devidos a Szegő ou a Geronimus (ver [**23, 24, 60**]). Na secção 6 apresentamos as relações de recorrência de Szegő na forma matricial; estas relações de recorrência serão utilizadas nos capítulos III e IV. As secções 7 e 8 têm uma dupla finalidade: por um lado, apresentar as funções de Carathéodory que correspondem às medidas de Aleksandrov e às medidas de ortogonalidade dos polinómios associados de ordem N, sobre as quais reincidirá o nosso estudo no capítulo II; por outro lado, ao apresentarmos a demonstração dos respectivos teoremas, evidenciar as relações de recorrência na forma matricial previamente apresentadas.

1. Funcionais hermitianas

Consideremos a *circunferência unitária*,

$$\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\} = \{e^{i\theta} : \theta \in [0, 2\pi[\},$$

o *espaço vectorial dos polinómios com coeficientes complexos*,

$$\mathbb{P} = \{p_n : p_n(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k,\ a_k, z \in \mathbb{C},\ n = 0, 1, \dots\},$$

e o *espaço vectorial dos polinómios de Laurent*,

$$\Lambda = \{\Lambda_{m,n} : \Lambda_{m,n}(z) = \sum_{k=m}^{n} a_k z^k,\ a_k \in \mathbb{C},\ m, n \in \mathbb{Z}\}.$$

Consideremos $u : \Lambda \longrightarrow \mathbb{C}$ uma *funcional linear* cujos momentos são definidos por

$$\langle u, z^{-n} \rangle = c_n,\ n \in \mathbb{Z}.$$

Assim, se $P(z) = \sum_{k=m}^{n} \alpha_k z^k$, temos $\langle u, P(z) \rangle = \sum_{k=m}^{n} \alpha_k c_k$. Associamos à sucessão de momentos (c_n) a matriz *hermitiana de Toeplitz*

$$M = \begin{bmatrix} c_0 & c_1 & \cdots & c_n & \cdots \\ \overline{c}_1 & c_0 & \cdots & c_{n-1} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ \overline{c}_n & \overline{c}_{n-1} & \cdots & c_0 & \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

e denotamos por Δ_n o *menor principal* de M de ordem $n+1$, ou seja,

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} c_0 & \cdots & c_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \overline{c}_n & \cdots & c_0 \end{vmatrix}, \; n \in \mathbb{N}, \; \Delta_0 = c_0, \; \Delta_{-1} = 1\,.$$

DEFINIÇÃO I.1 ([**23, 60**]). Uma *funcional linear* $u : \Lambda \to \mathbb{C}$ diz-se:

a) *hermitiana* se verificar $c_{-n} = \overline{c_n}, \forall n \in \mathbb{N}$,

b) *regular ou quasi-definida* se $\Delta_n \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}$,

c) *definida positiva* se $\Delta_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$.

Doravante utilizaremos a notação $\mathcal{R}$ para designar o conjunto constituído pelas *funcionais lineares hermitianas regulares*, e $\mathcal{R}^+$ para designar o conjunto constituído pelas *funcionais lineares hermitianas definidas positivas.*

Apresentamos, como primeiros exemplos de funcionais hermitianas, as funcionais (normalizadas) de *Lebesgue* e de *Dirac*, respectivamente $\mathcal{L}_0$ e δ_a com $|a| = 1$, definidas em termos dos seus momentos por

$$\langle \mathcal{L}_0, z^{-n} \rangle = \begin{cases} 1 \text{ se } n = 0 \\ 0 \text{ se } n \in \mathbb{Z} \setminus \{1\} \end{cases} \quad \text{e} \quad \langle \delta_a, z^{-n} \rangle = a^{-n}, \; \forall n \in \mathbb{Z}\,.$$

Além disso, a funcional de Lebesgue é definida positiva e tem uma representação em termos de um integral associado à medida de Lebesgue suportada em $\mathbb{T}$, ou seja,

$$\langle \mathcal{L}_0, z^{-n} \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} z^{-n} d\theta, \; z = e^{i\theta}, \; \forall n \in \mathbb{Z}\,.$$

Uma funcional linear u hermitiana regular induz em $\Lambda\times\Lambda$ um *produto interno generalizado*, definido por

$$\begin{aligned}&\langle\cdot,\cdot\rangle_u : \Lambda\times\Lambda \longrightarrow \mathbb{C}\\ &\langle P(z),Q(z)\rangle_u = \langle u, P(z)\overline{Q}(1/z)\rangle\,.\end{aligned}$$

DEFINIÇÃO I.2. Seja u uma funcional linear hermitiana e $\{\phi_n\}$ uma sucessão de polinómios de variável complexa tal que $\mathrm{gr}(\phi_n) = n,\ n = 0,1,\ldots$. $\{\phi_n\}$ designa-se por *sucessão de polinómios ortogonais relativamente a* u se $\forall n,m\geq 0$,

$$\langle\phi_n(z),\phi_m(z)\rangle_u = \langle u,\phi_n(z)\overline{\phi}_m(1/z)\rangle = K_n\delta_{m,n},\ K_n\neq 0\,. \tag{I.1}$$

Se cada ϕ_n for *mónico,* ou seja, $\phi_n(z) = z^n$+termos de grau inferior, então $\{\phi_n\}$ designa-se por *sucessão de polinómios ortogonais mónicos* e será denotada por SPOM.

OBSERVAÇÃO .
1. Nas condições da definição anterior, diremos também que $\{\phi_n\}$ é uma sucessão de polinómios ortogonais sobre $\mathbb{T}$.
2. Ao longo do texto referir-nos-emos à ortogonalidade do tipo (I.1) como *ortogonalidade hermitiana* ou ainda *ortogonalidade complexa.*

TEOREMA I.1 ([**60**]). *Seja u uma funcional linear hermitiana. $u\in\mathcal{R}$ se, e somente se, existir uma sucessão de polinómios, $\{\phi_n\}$, ortogonais relativamente a u. Além disso, $\{\phi_n\}$ é representada em termos dos momentos c_n de u por*

$$\begin{aligned}&\phi_0(z) = 1\,,\\ &\phi_n(z) = \frac{1}{\Delta_{n-1}}\begin{vmatrix} c_0 & c_1 & \cdots & c_n\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \overline{c}_{n-1} & \overline{c}_{n-2} & \cdots & c_1\\ 1 & z & \cdots & z^n\end{vmatrix},\ n\in\mathbb{N}\,.\end{aligned}$$

OBSERVAÇÃO . A sucessão de polinómios ortogonais é única a menos de uma constante. Assim, uma vez fixado o coeficiente do termo de maior ordem em z^n, para cada $n\geq 0$, podemos afirmar que existe uma única sucessão de polinómios ortogonais relativamente a uma funcional linear regular.

Se u for definida positiva, então $\langle \cdot, \cdot \rangle_u$ dado por (I.1) define um produto interno em Λ e, neste caso, veremos que u tem uma representação integral associada a uma medida de Borel. O teorema seguinte pode ser encontrado em [**23, 24, 60**].

TEOREMA I.2. *Seja u uma funcional linear hermitiana. Se $u \in \mathcal{R}^+$, então existe uma medida de Borel positiva, μ, tal que*

$$\langle u, z^{-n} \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} z^{-n} d\mu(\theta), \; z = e^{i\theta}, \; \forall n \in \mathbb{Z}\,.$$

OBSERVAÇÃO . No caso definido positivo, a condição de ortogonalidade (I.1) vem dada por

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \phi_n(z) \overline{\phi}_m(1/z) d\mu(\theta) = K_n \delta_{m,n}, \; z = e^{i\theta}, \; K_n > 0$$

e diremos que $\{\phi_n\}$ é ortogonal relativamente à medida μ.

DEFINIÇÃO I.3 ([**60**]). Seja $\{\phi_n\}$ uma sucessão de polinómios ortogonais mónicos sobre $\mathbb{T}$. Os parâmetros $a_n = \phi_n(0), \; n \geq 0$, são designados por *coeficientes de reflexão de $\{\phi_n\}$.*

LEMA I.1 ([**23, 60**]). *Seja u uma funcional linear hermitiana, $\{\phi_n\}$ a SPOM relativamente a u, e (a_n) a sucessão dos coeficientes de reflexão de $\{\phi_n\}$. Então, $\forall n \in \mathbb{N}$,*

$$\frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}} = \prod_{k=1}^{n} (1 - |a_k|^2) \quad e \quad 1 - |a_n|^2 = \frac{\Delta_n \Delta_{n-2}}{\Delta_{n-1}^2}\,.$$

Logo,
a) $u \in \mathcal{R}$ se, e somente se, $|a_n| \neq 1, \forall n \in \mathbb{N}$.
b) $u \in \mathcal{R}^+$ se, e somente se, $|a_n| < 1, \forall n \in \mathbb{N}$.

2. Polinómios de Bernstein-Szegő

Consideremos um polinómio P_k cujas raízes não estão no interior do disco unitário, com $P_k(0) > 0$, e seja $q_k(\theta) = |P_k(e^{i\theta})|^2$.

A *sucessão de polinómios ortogonais de Bernstein-Szegő* define-se por

$$\phi_n(z) = \begin{cases} z^n, \; n = 0, 1, \ldots, k-1 \\ z^{n-k} P_k(z), \; n \geq k\,. \end{cases}$$

Verifica-se que $\{\phi_n\}$ é ortogonal relativamente à funcional linear definida por (ver, por exemplo, [**8, 60**])

$$\langle u, z^n \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} z^n \frac{d\theta}{|P_k(e^{i\theta})|^2}, \; z = e^{i\theta}, \; n \in \mathbb{Z}\,,$$

ou seja, relativamente à medida ν dada por

$$d\nu(\theta) = \frac{1}{q_k(\theta)} d\theta\,.$$

De facto, se $m, n \geq k$, temos

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \phi_n(z) \overline{\phi}_m(1/z) \frac{1}{q_k(\theta)} d\theta \\ &\qquad = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} z^{n-k} P_k(z) z^{k-m} \overline{P_k(z)} \frac{1}{|P_k(e^{i\theta})|^2} d\theta \\ &\qquad = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} z^{n-m} d\theta = \delta_{m,n}, \quad z = e^{i\theta}\,. \end{aligned}$$

Se $m, n < k$ ou se ($m < k$ e $n \geq k$) ou ($m \geq k$ e $n < k$), temos, pelo teorema de Cauchy (ver [**1**]),

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \phi_n(z) \overline{\phi}_m(1/z) \frac{1}{q_k(\theta)} d\theta = \delta_{n,m}\,.$$

3. Relações de recorrência de Szegő

3.1. O operador $*_m$.

Começamos por definir um operador, linear em Λ', que utilizaremos ao longo do nosso trabalho. Dado $m \in \mathbb{N}$ e f função analítica, f^{*_m} é dada por

$$f^{*_m}(z) = z^m \overline{f}(1/z).$$

Assim, se $f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} b_k z^k$, temos $f^{*_m}(z) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \overline{b_k} z^{-k}$.

DEFINIÇÃO I.4. Seja P um polinómios com $\mathrm{gr}(P) = m$. Então, P^{*m} designa-se por *polinómio recíproco de P*. Se se verificar $P(z) = \eta P^{*_m}(z)$, com $|\eta| = 1$, então P designa-se por *polinómio auto-recíproco.*

OBSERVAÇÃO . Se $\mathrm{gr}(P) = m$ omitiremos o índice m, ou seja, escreveremos apenas P^*.

De seguida indicamos algumas propriedades que utilizaremos ao longo do trabalho (ver [**61**]).

LEMA I.2. *Seja $P \in \mathbb{P}_n$. Então,*

$$
\begin{aligned}
&(P^{*m}(z))^{*m} = P(z)\\
&(zP'(z))^{*n} = (P'(z))^{*n-1}\\
&z(P^{*n}(z))' = nP^{*n}(z) - (P'(z))^{*n-1} \qquad (\text{I.2})\\
&(P''(z))^{*n-2} = (n-1)nP^{*}(z) - 2(n-1)z(P^{*}(z))' + z^2(P^{*}(z))'' \qquad (\text{I.3})
\end{aligned}
$$

onde $m \in \mathbb{N}$.

Demonstração: Escrevamos

$$P(z) = b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \cdots + b_m z^m,\ m \le n.$$

A primeira e a segunda equação são imediatas. A equação (I.2) encontra-se demontrada em [**61**], e resulta das equações

$$
\begin{aligned}
&P^{*n}(z) = \bar{b}_0 z^n + \bar{b}_1 z^{n-1} + \cdots + \bar{b}_m z^{n-m}\,,\\
&z(P^{*n}(z))' = n\bar{b}_0 z^n + (n-1)\bar{b}_1 z^{n-1} + \cdots + (n-m)\bar{b}_m z^{n-m}\,,\\
&(P'(z))^{*n-1} = \bar{b}_1 z^{n-1} + 2\bar{b}_2 z^{n-2} + \cdots + m\bar{b}_m z^{n-m}\,.
\end{aligned}
$$

Para deduzir (I.3) consideramos (I.2) para P', e obtemos

$$(P'')^{*n-1} = n(P')^{*n} - z\left((P')^{*n}\right)'\,,$$

ou seja,

$$(P'')^{*n-1} = nz(P')^{*n-1} - z\left(z(P')^{*n-1}\right)'\,.$$

Se usarmos (I.2) na equação anterior obtemos

$$(P'')^{*n-1} = nz\left(nP^{*n} - z(P^{*n})'\right) - z\left[nzP^{*n} - z^2(P^{*n})'\right]'\,,$$

ou seja,

$$(P'')^{*n-1} = n^2 zP^{*n} - nz^2(P^{*n})' - z\left[nP^{*n} + nz(P^{*n})' - 2z(P^{*n})' - z^2((P^{*n})'')\right]\,.$$

Logo,

$$(P'')^{*n-1} = n(n-1)zP^{*n} - 2z^2(n-1)(P^{*n})' + z^3(P^{*n})''\,.$$

Uma vez que $(P''(z))^{*n-1} = z(P''(z))^{*n-2}$, segue-se o requerido. $\square$

3.2. Relações de recorrência de Szegő e teorema de Favard.

As sucessões de polinómios ortogonais sobre a circunferência verificam relações de recorrência conhecidas na literatura como *relações de recorrência de Szegő.*

TEOREMA I.3 ([**60**]). *Seja* $\{\phi_n\}$ *uma SPOM sobre* $\mathbb{T}$*. Então,* $\{\phi_n\}$ *verifica as seguintes relações de recorrência, equivalentes entre si, para* $n \in \mathbb{N}$,
R_1) $\phi_n(z) = z\phi_{n-1}(z) + a_n\phi_{n-1}^*(z)$
R_2) $\phi_n(z) = (1 - |a_n|^2)z\phi_{n-1}(z) + a_n\phi_n^*(z)$
R_3) $\phi_n^*(z) = \phi_{n-1}^*(z) + \overline{a}_n z\phi_{n-1}(z)$
R_4) $\phi_n^*(z) = (1 - |a_n|^2)\phi_{n-1}^*(z) + \overline{a}_n\phi_n(z)$
com $a_n = \phi_n(0)$*. Além disso, se* $\phi_n(0) \neq 0,\ \forall n \in \mathbb{N}$, $\{\phi_n\}$ *verifica a relação de recorrência a três termos*

$$a_n\phi_{n+1}(z) = (za_n + a_{n+1})\phi_n(z) - z\phi_{n+1}(0)(1 - |a_n|^2)\phi_{n-1}(z),\ n \in \mathbb{N}\,,$$
$$\phi_0(z) = 1,\ \phi_1(z) = z + a_1\,.$$

OBSERVAÇÃO . Os polinómios ϕ_n^* são conhecidos, na literatura de polinómios ortogonais, como *polinómios reversos* (cf. [**60**]).

De seguida enunciamos o teorema de Favard para o caso regular e para o caso definido positivo (ver [**17, 22, 33, 60**]; em [**4**] encontram-se extensões do teorema de Favard).

TEOREMA I.4. *Seja* (a_n) *uma sucessão de números complexos tal que* $|a_n| < 1, \forall n \in \mathbb{N}$*. Então, existe uma medida de Borel positiva,* μ*, com suporte em* $\mathbb{T}$*, tal que a sucessão de polinómios definida pela relação de recorrência* R_1 *é ortogonal relativamente a* μ*.*
Seja (a_n) *uma sucessão de números complexos tal que* $|a_n| \neq 1, \forall n \in \mathbb{N}$*. Então, existe uma funcional linear hermitiana regular* u *tal que a sucessão de polinómios definida pela relação de recorrência* R_1 *é a sucessão de polinómios ortogonais relativamente a* u*.*

4. Funções fundamentais

Nesta secção apresentamos definições de algumas funções que serão utilizadas subsequentemente, assim como algumas das suas principais propriedades. Utilizaremos a notação $\langle u_\theta, . \rangle$ para designar a acção da funcional linear u sobre a variável θ, com $\theta \in [0, 2\pi]$. Se $H_0(z) = \sum_{j=0}^{+\infty} b_j z^j$, $b_j \in \mathbb{C}$, escreveremos $H_0(z) = \mathcal{O}(z^\nu)$ se $b_0 = \cdots = b_{\nu-1} = 0$. Se $H_\infty(z) = \sum_{j=0}^{+\infty} b_j z^{-j}$, escreveremos $H_\infty(z) = \mathcal{O}(z^{-\nu})$ se $b_0 = \cdots = b_{\nu-1} = 0$.

4.1. Função de Carathéodory.

Começamos por apresentar a definição de função de Carathéodory (ver, por exemplo, [**57**, pg. 25]).

DEFINIÇÃO I.5. Seja F uma função analítica no disco unitário $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. F é uma *função de Carathéodory* se $F(0) = 1$ e $\Re e(F) > 0$ em $\mathbb{D}$. A função de Carathéodory designa-se por *trivial* se for uma função racional cujos pólos estão em $\mathbb{T}$ e se for puramente imaginária em todos os pontos regulares de $\mathbb{T}$.

Se considerarmos uma medida de probabilidade, μ, suportada em $\mathbb{T}$ facilmente se verifica que a função definida por

$$F(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} d\mu(\theta)$$

é uma função de Carathéodory. Veremos, no teorema seguinte, que o recíproco também é válido (cf. [**57**, pg. 29]) e, assim, é estabelecida uma relação biunívoca entre funções de Carathéodory e medidas de probabilidade suportadas em $\mathbb{T}$.

TEOREMA I.5. *(Representação de Herglotz) Se F for uma função de Carathéodory, então F admite a representação*

$$F(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} d\mu(\theta) \tag{I.4}$$

para uma única medida de probabilidade μ suportada em $\mathbb{T}$.

O seguinte resultado pode ser encontrada, por exemplo, em [**51**].

LEMA I.3. *A função de Carathéodory (I.4) admite as expansões assimptóticas*

$$F(z) = 1 + 2\sum_{k=1}^{+\infty} c_k z^k,\ |z| < 1 \tag{I.5}$$

$$F(z) = -1 - 2\sum_{k=1}^{+\infty} \overline{c}_k z^{-k},\ |z| > 1 \tag{I.6}$$

onde (c_n) *é a sucessão dos momentos da medida associada a* F*, com* $c_0 = 1$*.*

Demonstração: Uma vez que

$$\frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z} = \begin{cases} 1 + 2\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} e^{-ik\theta} z^k,\ |z| < 1 \\ -1 - 2\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} e^{ik\theta} z^{-k},\ |z| > 1 \end{cases} \tag{I.7}$$

(no sentido de convergência uniforme sobre compactos de $|z| < 1$ e $|z| > 1$, respectivamente), se $|z| < 1$ temos que

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z} d\mu(\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} 1 d\mu(\theta) + 2\sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-ik\theta} d\mu(\theta)\right) z^k .$$

Assim, obtemos (I.5).

Se $|z| > 1$, cálculos análogos aos anteriores permitem-nos obter (I.6). □

No que se segue consideraremos $u \in \mathcal{R}$ cuja sucessão de momentos é (c_n). Uma vez que para cada $\theta \in [0, 2\pi[$ é válida a expansão assimptótica (I.7), temos, formalmente,

$$\frac{1}{2\pi}\langle u_\theta, \frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z}\rangle = 1 + 2\sum_{k=1}^{+\infty} c_k z^k,\ |z| < 1 \tag{I.8}$$

$$\frac{1}{2\pi}\langle u_\theta, \frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z}\rangle = -1 - 2\sum_{k=1}^{+\infty} \overline{c}_k z^{-k},\ |z| > 1 . \tag{I.9}$$

Esta observação motiva a seguinte definição.

DEFINIÇÃO I.6. Seja $u \in \mathcal{R}$. A função F definida por

$$F(z) = \frac{1}{2\pi}\langle u_\theta, \frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z}\rangle,\ |z| \neq 1 \tag{I.10}$$

designa-se por *função formal de Carathéodory* (associada a u).

OBSERVAÇÃO .
1. Se u for definida positiva podemos associar-lhe uma medida, μ, e, assim, a função de Carathéodory (I.10) é representada por (I.4).
2. De (I.8) e (I.9) temos que a função formal de Carathéodory (I.10) verifica $\overline{F}(1/z) = -F(z)$.

O lema que se segue foi estabelecido em [**50**], e dá-nos uma representação para a medida associada.

LEMA I.4. *Seja F uma função analítica em $|z| < 1$ com pólos simples em $z_k \in \mathbb{C}, |z_k| = 1,\ k = 1, ..., n,$ e tal que $\lim_{z\to z_k} F(z)(z - z_k) = \gamma_k$ e $\gamma_k/z_k \in \mathbb{R}$. Além disso, suponhamos que os limites $\lim_{z\to e^{i\phi}} \Re e\{F(z) - \sum_{k=1}^{n} \gamma_k/(z - z_k)\}$ existem q.c. em $[0, 2\pi]$ e são L_p integráveis em $[0, 2\pi]$, com $p \in]0, \infty[$. Então,*

$$F(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} d\sigma(\theta)\,,$$

com

$$d\mu(\theta) = (\Re eF(e^{i\theta}) - const\,)d\theta - \sum_{k=1}^{n} \frac{\pi\gamma_k}{z_k}\delta_{z_k}\,, \tag{I.11}$$

onde $\Re eF(e^{i\theta}) = \lim_{z\to e^{i\theta}} \Re eF(z)\,,\ const = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\gamma_k}{2z_k}$, e δ_{z_k} denota a medida de Dirac em z_k.

Do lema anterior temos o corolário que se segue.

COROLÁRIO I.1. *Seja F uma função de Carathéodory e μ a medida associada. Se F for racional, com pólos simples em $z_k \in \mathbb{C}, |z_k| = 1,\ k = 1, ..., n,$ e tal que $\displaystyle\lim_{z\to z_k} F(z)(z - z_k) = \gamma_k$ com $\gamma_k/z_k \in \mathbb{R}$, então*

$$d\mu(\theta) = -2\,const\,d\theta - \sum_{k=1}^{n} \frac{\pi\gamma_k}{z_k}\delta_{z_k}\,, \tag{I.12}$$

onde $const = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\gamma_k}{2z_k}$.

Demonstração: Seja $F(z) = \sum_{k=1}^{n_0} \frac{\gamma_k}{z - z_k}$. Uma vez que

$$\frac{\gamma_k}{z - z_k} = -\frac{\gamma_k}{2z_k}\left(\frac{z_k + z}{z_k - z} + 1\right)$$

e, para $z_k = e^{i\theta_k}$, se tem que

$$\Re e\left\{\frac{z_k + e^{i\theta}}{z_k - e^{i\theta}}\right\} = 0,\ \forall\theta \in [0, 2\pi] \setminus \{\theta_k\},$$

então

$$\Re e(F(e^{i\theta})) = -\sum_{k=1}^{n_0} \frac{\gamma_k}{2z_k}.$$

Se utilizarmos a igualdade anterior em (I.11) obtemos (I.12). □

Salientamos o caso de F ser uma função formal de Carathéodory associada a uma funcional $u \in \mathcal{R}$: se F for racional, então u é dada pela representação distribucional

$$u = -2\,const\,\mathcal{L}_0 - \sum_{k=1}^{n} \frac{\pi\gamma_k}{z_k}\delta_{z_k}, \quad const = \sum_{k=1}^{n} \frac{\gamma_k}{2z_k}\,. \tag{I.13}$$

Esta é uma leitura funcional de (I.12).

4.2. Polinómios associados de primeira espécie.

A definição, o lema, e o corolário seguintes podem ser encontrados em [**23, 24**].

DEFINIÇÃO I.7. Seja $\{\phi_n\}$ uma SPOM relativamente a $u \in \mathcal{R}$. Os polinómios definidos por

$$\Omega_0(z) = 1 \ \text{ e } \ \Omega_n(z) = \frac{1}{2\pi}\langle u_\theta, \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z}\left(\phi_n(e^{i\theta}) - \phi_n(z)\right)\rangle,\ n \in \mathbb{N}\,,$$

definem uma sucessão de polinómios ortogonais, ditos *associados de primeira espécie.*

Do lema seguinte tem-se que $\{\Omega_n\}$ é uma sucessão de polinómios ortogonais mónicos que satisfaz uma relação de recorrência, similar à relação de recorrência verificada por $\{\phi_n\}$.

LEMA I.5. Seja $\{\phi_n\}$ uma SPOM relativamente a $u \in \mathcal{R}$, e $\{\Omega_n\}$ a sucessão dos polinómios ortogonais associados de primeira espécie. Então, $\{\Omega_n\}$ verifica a relação de recorrência

$$\begin{aligned} &\Omega_n(z) = z\Omega_{n-1}(z) - a_n\Omega^*_{n-1}(z),\ n \in \mathbb{N}\,, \\ &\Omega_0(z) = 1,\ \Omega_1(z) = z - a_1\,, \end{aligned} \tag{I.14}$$

com $a_n = \phi_n(0)$. Além disso, se $a_n \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}$, $\{\Omega_n\}$ verifica a relação de recorrência a três termos

$$a_n\Omega_{n+1}(z) = (za_n + a_{n+1})\Omega_n(z) - za_{n+1}(1-|a_n|^2)\Omega_{n-1}(z),\ n \in \mathbb{N}\,,$$
$$\Omega_0(z) = 1,\ \Omega_1(z) = z - a_1\,.$$

COROLÁRIO I.2. Seja $\{\phi_n\}$ uma SPOM relativamente a uma funcional linear hermitiana u, e $\{\Omega_n\}$ a sucessão dos polinómios de primeira espécie. Então, verificam-se as seguintes equações:

$$\phi^*_n(z)\Omega_n(z) + \phi_n(z)\Omega^*_n(z) = 2h_nz^n,\ n \in \mathbb{N}\,, \tag{I.15}$$

onde $h_n = \dfrac{1}{2\pi}\langle u_\theta, \phi_n(e^{i\theta})\overline{\phi}_n(e^{-i\theta})\rangle = \displaystyle\prod_{k=1}^{n}(1-|a_k|^2)\,.$

TEOREMA I.6 (Geronimus, [**22**]). *Dada a sucessão de parâmetros* (a_n) *tal que* $|a_n| < 1,\ n \in \mathbb{N}$, *sejam* $\{\phi_n\}$ *e* $\{\Omega_n\}$ *definidas por* R_1 *e (I.14), respectivamente. Então, a função de Carathéodory associada a* $\{\phi_n\}$ *é tal que*

$$\left|F(z) - \frac{\Omega^*_n(z)}{\phi^*_n(z)}\right| = \mathcal{O}(|z|^n),\ |z| < 1,\ n \to \infty\,.$$

Além disso, a sucessão definida por

$$K_n(z) = 1 + \frac{-2\overline{a}_1 z\ \big|}{\big|\ 1+\overline{a}_1 z} - \frac{\frac{\overline{a}_2}{\overline{a}_1}z(1-|a_1|^2)\ \big|}{\big|\ 1+\frac{\overline{a}_2}{\overline{a}_1}z} - \cdots - \frac{\frac{\overline{a}_{n+1}}{\overline{a}_n}z(1-|a_n|^2)\ \big|}{\big|\ 1+\frac{\overline{a}_{n+1}}{\overline{a}_n}z}\,, n \in \mathbb{N}\,,$$

converge para $F(z)$, *sobre compactos de* $\mathbb{D}$.

4.3. Funções de segunda espécie.

A definição seguinte pode ser encontrada em [**23**].

DEFINIÇÃO I.8. Seja $\{\phi_n\}$ uma SPOM relativamente a $u \in \mathcal{R}$. As funções definidas por

$$Q_0(z) = F(z) \;\text{ e }\; Q_n(z) = \frac{1}{2\pi}\langle u_\theta, \frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z}\phi_n(e^{i\theta})\rangle,\; n \in \mathbb{N},$$

são designadas por *funções de segunda espécie associadas a* $\{\phi_n\}$.

A dedução que apresentamos do teorema e do lema que se seguem é similar à de [**51**].

TEOREMA I.7 ([**23, 24, 51**]). Seja $\{\phi_n\}$ uma SPOM relativamente a uma funcional linear hermitiana u, e $\{\Omega_n\}$ e $\{Q_n\}$, respectivamente, a sucessão dos polinómios de primeira espécie e das funções de segunda espécie. Então, para $n \in \mathbb{N}$,

$$Q_n(z) = \Omega_n(z) + F(z)\phi_n(z) \tag{I.16}$$

$$Q_n^*(z) = \Omega_n^*(z) - F(z)\phi_n^*(z) \tag{I.17}$$

$$Q_n(z) = zQ_{n-1} - a_nQ_{n-1}^*(z) \tag{I.18}$$

$$Q_n^*(z) = Q_{n-1}^*(z) - \overline{a}_n zQ_{n-1}(z) \tag{I.19}$$

onde $Q_n^*(z) = z^n\overline{Q}_n(1/z),\ \forall n \in \mathbb{N},\ Q_0(z) = F(z),\ Q_0^*(z) = -F(z)$.

Demonstração: (I.16) segue-se da definição de $\{Q_n\}$. (I.18) e (I.19) resultam das relações de recorrência de Szegő para $\{\phi_n\}$ e $\{\Omega_n\}$, e de (I.16) e (I.17), respectivamente.

Deduza-se (I.17). Aplicando o operador $*_n$, com $n = \mathrm{gr}(\phi_n)$, a (I.16) obtemos

$$z^n\overline{Q}_n(1/z) = z^n\overline{\Omega}_n(1/z) + z^n\overline{F}(1/z)\overline{\phi}_n(1/z)$$

i.e.,

$$Q_n^*(z) = \Omega_n^*(z) + \overline{F}(1/z)\phi_n^*(z).$$

Sendo $\overline{F}(1/z) = -F(z)$, a última equação é dada por

$$Q_n^*(z) = \Omega_n^*(z) - F(z)\phi_n^*(z),$$

e obtemos (I.17). $\square$

4.3.1. *Expansão assimptótica das funções de segunda espécie.*

As expansões que apresentamos de seguida podem ser encontadas em [**23, 51**] e em [**57**, pg. 226].

LEMA I.6. Seja $\{\phi_n\}$ uma SPOM relativamente a $u \in \mathcal{R}$, $\{Q_n\}$ a sucessão das funções de segunda espécie e (a_n) a sucessão dos coeficientes de reflexão de $\{\phi_n\}$. Então, $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$Q_n(z) = 2h_n z^n + \mathcal{O}(z^{n+1}),\ |z| < 1 \tag{I.20}$$

$$Q_n(z) = 2a_{n+1}h_n z^{-1} + \mathcal{O}(z^{-2}),\ |z| > 1 \tag{I.21}$$

$$Q_n^*(z) = 2\overline{a}_{n+1}h_n z^{n+1} + \mathcal{O}(z^{n+2}),\ |z| < 1$$

$$Q_n^*(z) = 2h_n + \mathcal{O}(z^{-1}),\ |z| > 1$$

com $h_n = \prod_{k=1}^{n}(1 - |a_k|^2)$.

Demonstração: Façamos apenas a dedução de (I.20) e (I.21), pois as restantes equações deduzem-se de modo análogo. Atendendo à definição de Q_n, se $|z| < 1$ temos que

$$\begin{aligned} Q_n(z) &= \langle u, (1 + 2\sum_{k=1}^{+\infty} \xi^{-k} z^k)\phi_n(\xi)\rangle \\ &= \langle u, \phi_n(\xi)\rangle + 2\sum_{k=1}^{+\infty}\langle u, \xi^{-k}\phi_n(\xi)\rangle z^k . \end{aligned}$$

Uma vez que $\langle u, \phi_n(\xi)\,\xi^{-k}\rangle = 0,\ k = 0, \ldots, n-1,$ e $\langle u, \phi_n(\xi)\,\xi^{-n}\rangle = h_n$, obtemos

$$Q_n(z) = 2h_n z^n + 2\sum_{k=n+1}^{+\infty}\langle u, \xi^{-k}\phi_n(\xi)\rangle z^k .$$

Assim, obtemos (I.20).

Se $|z| > 1$, atendendo à definição de Q_n temos que

$$\begin{aligned} Q_n(z) &= \langle u, (-1 - 2\sum_{k=1}^{+\infty} \xi^{k} z^{-k})\phi_n(\xi)\rangle \\ &= -\langle u, \phi_n(\xi)\rangle - 2\langle u, \xi\phi_n(\xi)\rangle z^{-1} - 2\sum_{k=2}^{+\infty}\langle u, \xi^{k}\phi_n(\xi)\rangle z^{-k} . \end{aligned}$$

Das relações de ortogonalidade

$$\langle u, \xi\phi_n(\xi)\rangle = \langle u, \phi_{n+1}(\xi)\rangle - a_{n+1}\langle u, \phi_n^*(\xi)\rangle = -a_{n+1}h_n$$
$$\langle u, \phi_n(\xi)\rangle = 0$$

obtemos

$$Q_n(z) = 2a_{n+1}h_n z^{-1} - 2\sum_{k=2}^{+\infty}\langle u, \xi^k\phi_n(\xi)\rangle z^{-k}\,.$$

Assim, obtemos (I.21). □

5. Zeros de polinómios ortogonais

A alínea i) do lema seguinte pode ser encontrada em [**51**]. Mais resultados sobre zeros de polinómios ortogonais podem ser encontrados em [**4**] e nas referências aí citadas.

LEMA I.7. Seja $\{\phi_n\}$ uma SPOM relativamente a $u \in \mathcal{R}$, $\{\Omega_n\}$ a sucessão de polinómios associados de segunda espécie, e (a_n) a respectiva sucessão dos coeficientes de reflexão. Tem-se que:
i) se $a_n \neq 0$, então ϕ_n e Ω_n não têm zeros em comum (equivalentemente, se existir $\alpha \in \mathbb{C}$ tal que $\phi_n(\alpha) = \Omega_n(\alpha) = 0$, então $a_n = 0$);
ii) os polinómios ϕ_n^* e Ω_n^* não têm zeros em comum, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Demonstração: i) Consideremos a equação (I.15),

$$\phi_n^*(z)\Omega_n(z) + \phi_n(z)\Omega_n^*(z) = 2h_n z^n,\ \forall n \in \mathbb{N}\,.$$

Se α for um zero comum de ϕ_n e de Ω_n, i.e., $\phi_n(\alpha) = \Omega_n(\alpha) = 0$, fazendo $z = \alpha$ na equação anterior obtemos $\alpha = 0$, donde, $a_n = 0$.
ii) (Por redução ao absurdo) Se existir um zero comum a ϕ_n^* e a Ω_n^* ter-se-á, analogamente ao caso anterior, que $\alpha = 0$, donde $\phi_n^*(0) = 0$. Logo, das relações de recorrência de Szegő R_3 vem que $\phi_{n-1}^*(0) = 0$. Assim, tem-se que $\phi_k^*(0) = 0$, para $k = 1, ..., n$, e de R_1 segue-se que $\phi_n(z) = z^n\phi_0(z)$. Mas, então, $\phi_n^*(z) = \overline{\phi}_0$, ou seja, o polinómio ϕ_n^* é constante, o que contradiz o facto de ter algum zero. Assim, estabelecemos o enunciado em ii). □

6. Forma matricial para as relações de recorrência

Dada $u \in \mathcal{R}$, sejam $\{\phi_n\}, \{\Omega_n\}$ e $\{Q_n\}$, respectivamente, as sucessões dos polinómios ortogonais mónicos, dos polinómios associados de primeira espécie e das funções de segunda espécie relativamente a u. Definam-se as seguintes matrizes, para $n \geq 0$,

$$\psi_n^1 = [\phi_n \; -\Omega_n]^T, \tag{I.22}$$

$$\psi_n^2 = [\phi_n^* \; \Omega_n^*]^T \tag{I.23}$$

$$\mathcal{Q}_n = [-Q_n \; Q_n^*]^T \tag{I.24}$$

$$Y_n = \begin{bmatrix} \phi_n & -\Omega_n \\ \phi_n^* & \Omega_n^* \end{bmatrix} \tag{I.25}$$

onde $[\cdot]^T$ denota a tansposta. Doravante utilizaremos as matrizes

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad J = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Observamos que se verificam as relações seguintes, para $n \geq 0$,

$$(\psi_n^1)^* = J\,\psi_n^2 \;\text{ e }\; (\psi_n^2)^* = J\,\psi_n^1.$$

Começamos por apresentar as relações de recorrência de Szegő na forma matricial.

LEMA I.8. *Seja $u \in \mathcal{R}$, $\{\psi_n^1\}$, $\{\psi_n^2\}$, $\{\mathcal{Q}_n\}$, $\{Y_n\}$ as sucessões definidas pelas relações (I.22), (I.23), (I.24) e (I.25), respectivamente, e (a_n) a sucessão de coeficientes de reflexão de $\{\phi_n\}$. Então:*
a) ψ_n^1 e ψ_n^2 verificam, para todo o $n \geq 0$,

$$\psi_n^1(z) = z\psi_{n-1}^1(z) + a_n\psi_{n-1}^2(z)$$
$$\psi_n^2(z) = \overline{a}_n z\psi_{n-1}^1(z) + \psi_{n-1}^2(z)\,;$$

b) $\varphi_n = \begin{bmatrix} \psi_n^1 \\ \psi_n^2 \end{bmatrix}$ verifica, para todo o $n \in \mathbb{N}$,

$$\varphi_n = \mathcal{K}_n^1\varphi_{n-1}, \quad \mathcal{K}_n^1 = \begin{bmatrix} zI & a_nI \\ \overline{a}_n zI & I \end{bmatrix}, \tag{I.26}$$

com condições iniciais $\varphi_0 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$;
c) $\mathcal{Q}_n$ *verifica, para todo o* $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathcal{Q}_n = \mathcal{K}_n \mathcal{Q}_{n-1}, \quad \mathcal{K}_n = \begin{bmatrix} z & a_n \\ \overline{a}_n z & 1 \end{bmatrix}, \tag{I.27}$$

com condições iniciais $\mathcal{Q}_0 = [-F \;\; -F]^T$;
d) $\{Y_n\}$ *verifica, verifica (I.27), para todo o* $n \in \mathbb{N}$, *com condições iniciais* $Y_0 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Demonstração: Basta utilizar as relações de recorrência de Szegő para $\{\phi_n\}$ e para $\{\Omega_n\}$. □

Salientamos que os vectores ψ_n^1, ψ_n^2 são linearmente independentes, uma vez que, de (I.15), se tem que

$$\det[\psi_n^1 \; \psi_n^2] = h_n z^n, \; n \in \mathbb{N},$$

donde $\det[\psi_n^1 \; \psi_n^2] \neq 0, \; z \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}$.

LEMA I.9. *Seja* $u \in \mathcal{R}$, $\{Q_n\}$ *a sucessão de funções de segunda espécie, e* $\{\psi_n^1\}$, $\{\psi_n^2\}$, *as sucessões de vectores associados a u definidos por (I.22) e (I.23). Verificam-se as seguintes relações, para* $n \in \mathbb{N}$,

$$\left[(\psi_n^1)'\right]^{*_{n-1}} = nJ\psi_n^2 - zJ(\psi_n^2)' \tag{I.28}$$
$$\left[\left(\psi_n^1\right)''\right]^{*_{n-2}} = z^2\, J(\psi_n^2)'' - 2(n-1)z\, J(\psi_n^2)' + n(n-1)J\psi_n^2 \tag{I.29}$$
$$(Q_n')^{*_{n-1}} = nQ_n^* - z(Q_n^*)' \tag{I.30}$$
$$\left[(Q_n)''\right]^{*_{n-2}} = z^2(Q_n)'' - 2(n-1)zQ_n' + n(n-1)Q_n\,. \tag{I.31}$$

Demonstração: Para demonstrar (I.28) utilizamos a equação (I.2) para $\{\phi_n\}$ e para $\{\Omega_n\}$. Para obter (I.29) utilizamos as equações (I.3) para $\{\phi_n\}$ e para $\{\Omega_n\}$. Para obter (I.30) e (I.31) derivamos (I.16) e (I.17) e utilizamos (I.2) e (I.3) para $\{\phi_n\}$ e para $\{\Omega_n\}$, e a relação $\overline{F}(1/z) = -F(z)$. □

7. Medidas de Aleksandrov

Seja $\{\phi_n\}$ uma SPOM sobre $\mathbb{T}$, (a_n) a sucessão de coeficientes de reflexão de $\{\phi_n\}$, e λ um escalar tal que $|\lambda| = 1$. Definam-se os parâmetros

$$a_n^\lambda = \lambda a_n, \; n = 0, 1, \dots \,, \tag{I.32}$$

$\{\phi_n(z,\lambda)\}$ a respectiva sucessão de polinómios ortogonais,

$$\phi_0(z,\lambda) = 1 \;\text{ e }\; \phi_{n+1}(z,\lambda) = z\phi_n(z,\lambda) + a_n^\lambda \phi_n^*(z,\lambda), \; n \in \mathbb{N}\,,$$

e $\{\Omega_n(z,\lambda)\}$ a sucessão dos polinómios associados. Temos a seguinte definição (ver [**57**, pg. 222] e [**25**, secção 5]).

DEFINIÇÃO I.9. Seja μ uma medida, (a_n) a respectiva sucessão de coeficientes de reflexão, e λ um número complexo tal que $|\lambda| = 1$. A medida μ_λ associada aos coeficientes de reflexão a_n^λ dados por (I.32) designa-se por *medida de Aleksandrov associada a* (a_n).

No que se segue consideraremos F_μ a função de Carathéodory associada a μ e F_{μ_λ} a função de Carathéodory associada à medida de Aleksandrov μ_λ. Os resultados que se seguem podem ser encontrados em [**23, 25, 57**]. A demonstração que apresentamos utiliza as relações de recorrência de Szegő na forma matricial (I.27).

TEOREMA I.8. *Seja μ uma medida de probabilidade não trivial em $\mathbb{T}$, (a_n) a respectiva sucessão de coeficientes de reflexão, e (a_n^λ) dada por (I.32). Então:*
a) a SPOM $\{\phi_n(\cdot,\lambda)\}$ é a solução polinomial mais geral da equação às diferenças

$$a_n y_{n+1} = (za_n + a_{n+1})y_n - za_{n+1}(1-|a_n|^2)y_{n-1}, \; n \in \mathbb{N}\,, \tag{I.33}$$

sob a condição que y_n seja um polinómios de grau n e $y_1/y_0 = z - a$, $|a| < 1$. Além disso, $|\lambda| = 1$ e, para todo o $n \in \mathbb{N}$,

$$\phi_n(z,\lambda) = \frac{1+\lambda}{2}\phi_n(z) + \frac{1-\lambda}{2}\Omega_n(z) \tag{I.34}$$

$$\Omega_n(z,\lambda) = \frac{1-\lambda}{2}\phi_n(z) + \frac{1+\lambda}{2}\Omega_n(z)\,. \tag{I.35}$$

b) a função de Carathéodory associada a μ_λ é definida por

$$F_{\mu_\lambda}(z) = \frac{(\lambda-1) + (1+\lambda)F_\mu(z)}{(1+\lambda) + (\lambda-1)F_\mu(z)}\,. \tag{I.36}$$

Demonstração: Deduziremos apenas (I.34), (I.35) e (I.36).

Para obter (I.34) e (I.35) utilizamos as relações de recorrência de Szegő na forma matricial tipo (I.27) para Y_n^λ,

$$Y_n^\lambda = \mathcal{K}_n^\lambda Y_{n-1}^\lambda,\ Y_n^\lambda = \begin{bmatrix} \phi_n^\lambda & -\Omega_n^\lambda \\ (\phi_n^\lambda)^* & (\Omega_n^\lambda)^* \end{bmatrix},\ \mathcal{K}_n^\lambda = \begin{bmatrix} z & \lambda a_n \\ \overline{\lambda a_n} z & 1 \end{bmatrix}. \tag{I.37}$$

Uma vez que $\mathcal{K}_n^\lambda = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \overline{\lambda} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z & a_n \\ \overline{a}_n z & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \overline{\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}^{-1}$, temos que (I.37) é dada por

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} Y_n^\lambda = \mathcal{K}_n \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} Y_{n-1}^\lambda,\ \forall n \geq 0\,.$$

Ou seja, a sucessão $\left\{ \mathcal{Y}_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} Y_n^\lambda \right\}$ verifica $\mathcal{Y}_n = \mathcal{K}_n \mathcal{Y}_{n-1},\ \forall n \geq 0\,.$ Logo, existe uma matriz invertível M tal que

$$\mathcal{Y}_n M = Y_n,\ \forall n \geq 0\,. \tag{I.38}$$

Em particular, para $n = 0$, temos que $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} M = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, ou seja, $M = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1+\overline{\lambda} & \overline{\lambda}-1 \\ \overline{\lambda}-1 & 1+\overline{\lambda} \end{bmatrix}$.

Logo, de (I.38), temos

$$Y_n^\lambda = \begin{bmatrix} \frac{\lambda+1}{2}\phi_n + \frac{1-\lambda}{2}\Omega_n & \frac{\lambda-1}{2}\phi_n - \frac{1+\lambda}{2}\Omega_n \\ \frac{\overline{\lambda}+1}{2}\phi_n^* + \frac{1-\overline{\lambda}}{2}\Omega_n^* & \frac{1-\overline{\lambda}}{2}\phi_n^* + \frac{1+\overline{\lambda}}{2}\Omega_n^* \end{bmatrix},$$

donde se segue (I.34) e (I.35) e também

$$(\phi_n^\lambda)^* = \frac{1+\overline{\lambda}}{2}\phi_n^* + \frac{1-\overline{\lambda}}{2}\Omega_n^* \tag{I.39}$$

$$(\Omega_n^\lambda)^* = \frac{1-\overline{\lambda}}{2}\phi_n^* + \frac{1+\overline{\lambda}}{2}\Omega_n^* \tag{I.40}$$

Para obter (I.36) utilizamos o teorema I.6, ou seja,

$$F_{\mu_\lambda}(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{(\Omega_n^\lambda)^*}{(\phi_n^\lambda)^*}\,,$$

com $(\phi_n^\lambda)^*$ e $(\Omega_n^\lambda)^*$ dados por (I.39) e (I.40), respectivamente. □

OBSERVAÇÃO .
1. Nas páginas 35 e 36 de [**57**] mostra-se que se λ for tal que $|\lambda| = 1$, então F_{μ_λ} definida por (I.36) define uma função de Carathéodory.
2. Na secção seguinte apresentaremos funções de Carathéodory de uma forma mais geral que a anterior, dada em (I.36), ou seja, veremos funções de Carathéodory do tipo

$$\tilde{F}(z) = \frac{-C(z) + D(z)F(z)}{A(z) - B(z)F(z)}\,,$$

com A, B, C, D polinómios.

Finalmente, obtemos a relação entre a função de Carathéodory associada a $\{\phi_n\}$ e a função de Carathéodory associada a $\{\Omega_n\}$.

COROLÁRIO I.3. *Seja $\{\phi_n\}$ uma SPOM sobre $\mathbb{T}$, $\{\Omega_n\}$ a sucessão dos polinómios associados de primeira espécie, e F, F_1 as respectivas funções de Carathéodory. Então, $F_1 = 1/F$.*

Demonstração: Das relações de recorrência para $\{\Omega_n\}$ (cf. secções I.3.2. e I.4.2.) observamos que os polinómios associados de primeira espécie correspondem ao caso $\lambda = -1$, donde se segue o resultado. □

8. Polinómios associados de ordem N

Apresentamos a definição de polinómios associados de ordem N sobre $\mathbb{T}$. Estes polinómios foram estudados pela primeira vez por Peherstorfer, em [**50**].

DEFINIÇÃO I.10 (Peherstorfer, [**50**]). Seja $\{\phi_n\}$ uma SPOM sobre a $\mathbb{T}$ e (a_n) a repectiva sucessão dos coeficientes de reflexão e $N \in \mathbb{N}$. A sucessão de polinómios ortogonais $\{\phi_n^N\}$ definida por $\phi_n^N(0) = a_{n+N}$, $n = 0, 1, \ldots$, designa-se por *sucessão de polinómios associados de $\{\phi_n\}$ de ordem N.*

Em [**50**, pg.176] é estabelecido o teorema que se segue. A demonstração que apresentamos difere da apresentada em [**50**] e utiliza as relações de recorrência de Szegő na forma matricial dadas na secção 6.

TEOREMA I.9. *Seja F uma função de Carathéodory, $\{\phi_n\}$ a SPOM relativamente a F, e seja $\{\Omega_n\}$ a respectiva sucessão dos polinómios associados de primeira espécie. Então, para $n = 0, 1, 2, \ldots$, verifica-se que:*

$$\phi_n^N = \frac{\phi_{n+N}(\Omega_N^* + \Omega_N) - \Omega_{n+N}(\phi_N - \phi_N^*)}{2h_N z^N}, \tag{I.41}$$

$$\Omega_n^N = \frac{-\phi_{n+N}(\Omega_N - \Omega_N^*) + \Omega_{n+N}(\phi_N + \phi_N^*)}{2h_N z^N}, \tag{I.42}$$

com $h_N = \prod_{k=1}^{n}(1 - |a_k|^2)$, e $\{\phi_n^N\}$ é ortogonal relativamente à função de Carathéodory definida por

$$F^N = \frac{(\Omega_N - \Omega_N^*) + (\phi_N + \phi_N^*)F}{(\Omega_N + \Omega_N^*) + (\phi_N - \phi_N^*)F}. \tag{I.43}$$

Demonstração: Escrevamos

$$Y_n = \begin{bmatrix} \phi_n & -\Omega_n \\ \phi_n^* & \Omega_n^* \end{bmatrix}, \quad Y_n^N = \begin{bmatrix} \phi_n^N & -\Omega_n^N \\ (\phi_n^N)^* & (\Omega_n^N)^* \end{bmatrix}, \forall n \in \mathbb{N}, \quad Y_0^N = Y_0 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Temos as relações de recorrência de Szegő na forma matricial

$$Y_n^N = \mathcal{A}_n^N Y_{n-1}^N, \quad \mathcal{A}_n^N = \begin{bmatrix} z & \phi_n^N(0) \\ \overline{\phi_n^N(0)} z & 1 \end{bmatrix}, n \in \mathbb{N}. \tag{I.44}$$

Por outro lado, temos que

$$Y_{n+N} = \mathcal{A}_{n+N} Y_{n+N-1}, \quad \mathcal{A}_{n+N} = \begin{bmatrix} z & a_{n+N} \\ \overline{a_{n+N}} z & 1 \end{bmatrix}, n \in \mathbb{N}. \tag{I.45}$$

Uma vez que $\phi_n^N(0) = a_{n+N}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, resulta, de (I.44) e de (I.45), que existe uma matriz invertível M^N tal que

$$Y_n^N M^N = Y_{n+N}, \ \forall n \geq 0.$$

Logo, para $n = 0$, temos que $M^N = (Y_0^N)^{-1} Y_N$, e assim obtemos que

$$Y_n^N = Y_{n+N} \, (Y_N)^{-1} \, Y_0^N,$$

de onde se segue que

$$\begin{aligned} 2h_N z^N \, \phi_n^N &= \phi_{n+N}(\Omega_N^* + \Omega_N) - \Omega_{n+N}(\phi_N - \phi_N^*), \\ 2h_N z^N \, (\phi_n^N)^* &= \phi_{n+N}^*(\Omega_N^* + \Omega_N) + \Omega_{n+N}^*(\phi_N - \phi_N^*), \qquad \text{(I.46)} \\ 2h_N z^N \, \Omega_n^N &= -\phi_{n+N}(\Omega_N - \Omega_N^*) + \Omega_{n+N}(\phi_N + \phi_N^*), \\ 2h_N z^N \, (\Omega_n^N)^* &= \phi_{n+N}^*(\Omega_N - \Omega_N^*) + \Omega_{n+N}^*(\phi_N + \phi_N^*). \qquad \text{(I.47)} \end{aligned}$$

Logo, temos (I.41) e (I.42).

Agora, pelo teorema I.6 temos

$$F^N = \lim_{n\to\infty} \frac{(\Omega_n^N)^*}{(\phi_n^N)^*}\,.$$

De (I.46) e (I.47) resulta que

$$F^N = \lim_{n\to\infty} \frac{\phi_{n+N}^*(\Omega_N - \Omega_N^*) + \Omega_{n+N}^*(\phi_N + \phi_N^*)}{\phi_{n+N}^*(\Omega_N^* + \Omega_N) + \Omega_{n+N}^*(\phi_N - \phi_N^*)}\,,$$

ou seja,

$$F^N = \frac{(\Omega_N - \Omega_N^*) + (\phi_N + \phi_N^*)\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\Omega_{n+N}^*}{\phi_{n+N}^*}}{(\Omega_N^* + \Omega_N) + (\phi_N - \phi_N^*)\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\Omega_{n+N}^*}{\phi_{n+N}^*}}\,.$$

Pelo teorema I.6 segue-se (I.43). □

CAPÍTULO II

Funcionais hermitianas tipo Laguerre-Hahn

Neste capítulo introduzimos o conceito de funcional linear hermitiana tipo Laguerre-Hahn (ou de função de Carathéodory tipo Laguerre-Hahn): seja u uma funcional linear hermitiana regular definida no espaço dos polinómios de Laurent e F a correspondente função formal de Carathéodory. No sentido lato, diremos que a funcional u (ou F) é do tipo Laguerre-Hahn se F verificar uma equação diferencial

$$zAF' = BF^2 + CF + D,\ A \neq 0\,,$$

onde A, B, C, D são polinómios. Ao conjunto das funcionais (ou funções de Carathéodory) deste tipo chamaremos classe Laguerre-Hahn sobre a circunferência unitária.

Assim definida, a classe Laguerre-Hahn sobre a circunferência unitária pode ser vista como uma extensão da classe Laguerre-Hahn sobre a recta real, estudada em [**35, 41, 42, 45**], uma vez que, sobre a circunferência unitária, a função de Carathéodory é a análoga da função de Stieltjes (cf. [**55**])).

Se $B = 0$ obtemos a classe Laguerre-Hahn afim sobre a circunferência unitária (ver [**10, 15, 52**]); se $B = 0$ e C, D forem polinómios específicos, obtemos a classe semi-clássica sobre a circunferência unitária (ver [**10, 15**]). A classe Laguerre--Hahn sobre a circunferência unitária também contém a classe das funcionais de segundo grau sobre a circunferência unitária (ver [**14**]) e contém as transformações do tipo racional-linear com coeficientes polinomiais de funções de Carathéodory que estão na classe Laguerre-Hahn (ver [**11**]).

Neste capítulo, o nosso principal objectivo é a caracterização das funcionais hermitianas Laguerre-Hahn em termos de uma equação distribucional. Mais concretamente, estabeleceremos a equivalência entre $zAF' = BF^2 + CF + D$ e uma equação distribucional para a respectiva funcional u, $\mathcal{D}(Au) = B_1u^2+C_1u+H_1\,\mathcal{L}_0$, onde $\mathcal{L}_0$ é a funcional de Lebesgue sobre a circunferência e B_1, C_1, H_1 são polinómios definidos em termos de A, B, C, D (cf. teorema II.5).

Este capítulo está estruturado da forma seguinte.

Na secção 1 formalizamos algumas operações sobre o dual algébrico do espaço dos polinómios de Laurent que serão utilizadas nas secções seguintes.

Na secção 2 estudamos as funcionais semi-clássicas sobre a circunferência unitária.

Na secção 3 definimos a classe Laguerre-Hahn sobre a circunferência unitária. Estudamos as funcionais de segundo grau sobre a circunferência unitária na subsecção 1; na subsecção 2 estudamos a estabilidade na classe Laguerre-Hahn segundo transformações do tipo racional-linear com coeficientes polinomiais; na subsecção 3 apresentamos exemplos.

Na secção 4 estabelecemos uma caracterização em termos de uma equação distribucional para as funcionais hermitianas tipo Laguerre-Hahn.

A maioria dos resultados apresentados neste capítulo fazem parte de [**10, 11**].

1. Operações no espaço dual dos polinómios de Laurent

Seja Λ o espaço vectorial dos polinómios de Laurent de coeficientes em $\mathbb{C}$ (cf. secção I.1) e Λ' o seu dual algébrico. Seja $u \in \Lambda'$ uma funcional linear hermitiana e (u_n) a sucessão dos momentos de u. Dados $f, g \in \Lambda$, definimos as funcionais fu e $\mathcal{D}u$, ambos elementos de Λ', por

$$\langle fu, p\rangle = \langle u, fp\rangle,\ p \in \Lambda\,,$$

$$\langle \mathcal{D}u, p\rangle = -i\langle u, zp'\rangle,\ p \in \Lambda\,,$$

e, consequentemente,

$$\langle \mathcal{D}(gu), p\rangle = -i\langle u, zgp'\rangle,\ p \in \Lambda\,. \tag{II.1}$$

Observe-se que se u for hermitiana, então $\mathcal{D}u$ também é hermitiana.

Considere-se a *função geradora dos momentos* associada a u (ver [**45**, pg. 5]),

$$\mathcal{F}_u(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n z^n,\ |z| < 1,\ \ \mathcal{F}_u(z) = -\sum_{n=1}^{+\infty} u_{-n} z^{-n}\,,\ |z| > 1\,.$$

Temos a seguinte relação (formal) entre a função de Carathéodory associada a u, F_u, e a função geradora dos momentos associda a u, $\mathcal{F}_u$,

$$\mathcal{F}_u(z) = \frac{F_u(z)+1}{2}\,, \quad |z| \neq 1\,. \tag{II.2}$$

De seguida definimos o produto de duas funcionais hermitianas. Esta definição é uma extensão da definição dada em [**45**] para o caso real.

DEFINIÇÃO II.1. Sejam $u, v \in \Lambda'$ funcionais lineares hermitianas e $\mathcal{F}_u, \mathcal{F}_v$ as respectivas funções geradoras dos momentos. O *produto de* u *e* v, uv, é a *funcional* linear definida em termos dos seus momentos por

$$(uv)_n = \sum_{\substack{\nu+k=n \\ sgn(\nu)=sgn(k)=sgn(n)}} u_\nu v_k, \quad n \in \mathbb{Z}\,, \tag{II.3}$$

e que verifica

$$\mathcal{F}_u(z)\,\mathcal{F}_v(z) = \mathcal{F}_{uv}(z)\,. \tag{II.4}$$

OBSERVAÇÃO . A funcional linear (uv) definida em (II.3) é hermitiana pois, para todo o $n \in \mathbb{Z}$, temos

$$\overline{(uv)}_{-n} = \sum_{\nu+k=-n} \overline{u}_\nu\,\overline{v}_k = \sum_{-\nu-k=n} u_{-\nu}v_{-k} = \sum_{l+m=n} u_l v_m = (uv)_n\,.$$

Como consequência da definição anterior obtemos o seguinte resultado.

LEMA II.1. *Seja* u *uma funcional linear hermitiana e* F_u *a respectiva função formal de Carathéodory. Então, verifica-se que*

$$(F_u)^2 = 2F_{u^2} - 2F_u + 1\,. \tag{II.5}$$

Demonstração: Se considerarmos $u = v$ em (II.4) e utilizarmos (II.2) obtemos

$$\left(\frac{F_u+1}{2}\right)^2 = (\mathcal{F}_u)^2 = \mathcal{F}_{u^2} = \frac{F_{u^2}+1}{2}\,.$$

Logo, obtemos (II.5). □

Para finalizar, apresentamos um lema que utilizaremos nas próximas secções (ver [**3**]).

LEMA II.2. *Seja* u *uma funcional linear hermitiana e* P *um polinómio. Então, a funcional linear* $(P(z) + \overline{P}(1/z))\,u$ *é hermitiana.*

Demonstração: Denotemos por c_n o momento de ordem n de $(P+\overline{P})u$, e escreva-se $R(z)=P(z)+\overline{P}(1/z)$. Temos que

$$c_n = \langle Ru, z^{-n}\rangle,\ n\in\mathbb{Z}\,, \tag{II.6}$$

ou seja, $c_n=\langle u, R(z)z^{-n}\rangle$. Sendo u hermitinana, temos que

$$\langle u, R(z)z^{-n}\rangle = \overline{\langle u, \overline{R}(1/z)z^{n}\rangle}\,.$$

Uma vez que $\overline{R}(1/z)=R(z)$, obtemos $c_n=\overline{\langle u, R(z)z^n\rangle}$, ou seja,

$$c_n = \overline{\langle Ru, z^{n}\rangle}\,. \tag{II.7}$$

De (II.6) e de (II.7) conclui-se que $c_n = \overline{c_{-n}}$, $\forall n\in\mathbb{Z}$. Logo, a funcional $(P+\overline{P})u$ é hermitiana. □

2. Funcionais hermitianas semi-clássicas

DEFINIÇÃO II.2 ([**61**]). Seja $u\in\mathcal{R}$. u designa-se por *semi-clássica* se existir um par de polinómios A, B, com $A\neq 0$, tais que

$$\mathcal{D}(Au)=Bu\,. \tag{II.8}$$

A sucessão de polinómios ortogonais relativamente a u designa-se por *sucessão de polinómios ortogonais semi-clássicos.*

A dedução do resultado a) do lema que se segue pode ser encontrada em [**61**].

LEMA II.3. *Seja u uma funcional semi-clássica e u_1, u_2 as funcionais (quando regulares) definidas por*

$$u_1 = u+\sum_{k=1}^{n_0}\lambda_k\delta_{z_k},\ \lambda_k\in\mathbb{R}, |z_k|=1\,, \tag{II.9}$$

$$u_2 = (P+\overline{P})u,\ P\in\mathbb{P}\,. \tag{II.10}$$

Então, u_1 e u_2 são semi-clássicas.
Além disso, se u verificar $\mathcal{D}(Au)=Bu$, então:
a) u_1 verifica $\mathcal{D}(A_1u_1)=B_1u_1$ com

$$A_1(z)=A(z)\prod_{k=1}^{n_0}(z-z_k),\quad B_1(z)=B(z)\prod_{k=1}^{n_0}(z-z_k)\,. \tag{II.11}$$

b) u_2 *verifica* $\mathcal{D}(A_2u_2) = B_2u_2$ *com*

$$A_2 = Az^p(P+\overline{P}), \quad B_2 = z^p(P+\overline{P})\,(B+ipz^pA) + 2iAz^{p+1}(P+\overline{P})' \quad \text{(II.12)}$$

onde $p = \mathrm{gr}(P)+1$.

Demonstração: As funcionais u_1 e u_2 são hermitianas. Para verificar o carácter hermitiano de u_1 temos em atenção que $\lambda_k \in \mathbb{R}$ e $|z_k| = 1,\ k = 1,\ldots,n_0$, e para verificar o carácter hermitiano de u_2 temos em atenção o lema II.2.

Para estabelecer (II.11) temos em atenção a definição do operador $\mathcal{D}$ e do operador δ_{z_k}, $\langle \delta_{z_k}, (z-z_k)\rangle = 0,\ k = 1,...,n_0$. Assim, conclui-se que u_1 dada por (II.9) é semi-clássica.

Deduza-se (II.12). Por definição, $\mathcal{D}(Au) = Bu$ é equivalente a

$$-i\langle Au, zf'\rangle = \langle Bu, f\rangle,\ \forall f \in \Lambda\,.$$

Se tomarmos $f = z^p(P+\overline{P})^2z^n$ na equação anterior obtemos

$$\begin{aligned}- i\langle Au, &pz^p(P+\overline{P})^2z^n + 2z^{p+1}(P+\overline{P})'(P+\overline{P})z^n \\ &+ z^p(P+\overline{P})^2nz^n\rangle = \langle Bu, z^p(P+\overline{P})^2z^n\rangle\,,\end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}- in&\langle Az^p(P+\overline{P})^2u, z^n\rangle \\ &= \langle z^p(P+\overline{P})^2Bu + ipz^pA(P+\overline{P})^2u + 2iAz^{p+1}(P+\overline{P})'(P+\overline{P})u, z^n\rangle\,.\end{aligned}$$

Uma vez que $u_2 = (P+\overline{P})u$, a equação anterior é dada por

$$-in\langle Az^p(P+\overline{P})u_2, z^n\rangle = \langle \big(z^p(P+\overline{P})\,(B+ipz^pA) + 2iAz^{p+1}(P+\overline{P})'\big)\,u_2, z^n\rangle\,.$$

Logo, se definirmos os polinómios A_2 e B_2 como indicado em (II.12), obtemos

$$\langle \mathcal{D}(A_2u_2), z^n\rangle = \langle B_2u_2, z^n\rangle,\ \forall n \in \mathbb{Z}\,,$$

donde se segue que $\mathcal{D}(A_2u_2) = B_2u_2$, ou seja, o carácter semi-clássico de u_2. $\square$

Como primeiro exemplo de funcional semi-clássica apresentamos a funcional de Lebesgue, $\mathcal{L}_0$ (cf. secção I.1). $\mathcal{L}_0$ verifica (II.8) com $A(z) = 1, B(z) = 0$. Além disso, do lema anterior resulta que as funcionais $\mathcal{L}_0 + \sum_{k=1}^{n_0} \lambda_k\delta_{z_k},\ n_0 \in \mathbb{N}$, também são semi-clássicas.

COROLÁRIO II.1. *Seja $u \in \mathcal{R}$ e F a respectiva função de Carathéodory. Se F for racional, então u é semi-clássica.*

Demonstração: Tendo em atenção que a funcional $\mathcal{L}_0$ é semi-clássica, o resultado enunciado segue-se do corolário I.1, observação subsequente (cf. (I.13)) e do lema anterior. □

Finalmente, vejamos a relação (no caso definido positivo) entre a equação distribucional (II.8) para a funcional u e a equação diferencial para a parte absolutamente contínua da medida associada a u. A proposição que se segue pode ser encontrada em [**37, 61**].

PROPOSIÇÃO II.1. *Seja $u \in \mathcal{R}^+$ e μ a medida associada a u, do tipo*

$$d\mu(\theta) = w(\theta)\frac{d\theta}{2\pi} + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \delta(z_k),\ |z_k| = 1,\ \lambda_k > 0,\ k = 1, ..., m\,. \tag{II.13}$$

Então, existem polinómios A e B tais que u verifica $\mathcal{D}(Au) = Bu$ se, e somente se,

$$\frac{dw(e^{i\theta})/d\theta}{w(e^{i\theta})} = \frac{B(e^{i\theta}) - dA(e^{i\theta})/d\theta}{A(e^{i\theta})} \tag{II.14}$$

com $A(e^{i\theta}) = 0$ nos pontos singulares de w e em $z_k, k = 1, ...m$.

OBSERVAÇÃO .

1. Por continuidade analítica, (II.14) é equivalente a

$$\frac{dw(z)/dz}{w(z)} = \frac{-iB(z) - zA'(z)}{zA(z)}\,.$$

2. Tendo em conta o lema II.3 e a proposição anterior, obtemos como exemplos de medidas semi-clássicas (cf. [**61**, pgs. 58 e 59]):

a) modificações racionais positivas de medidas semi-clássicas;

b) modificações via adição de pesos (Deltas de Dirac) com massa positiva num número finito de pontos de $\mathbb{T}$.

Os polinómios de Jacobi são um exemplo de uma família semi-clássica sobre $\mathbb{T}$. São ortogonais relativamente à medida (de Jacobi) definida por $\mu_{\alpha,\beta}(\theta) =$

$\mu'_{\alpha,\beta}(\theta)d\theta$, com

$$\mu'_{\alpha,\beta}(\theta) \;=\; \left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^{2\alpha}\left|\cos\frac{\theta}{2}\right|^{2\beta}\;,\ \theta\in[0,2\pi]\,,\ \alpha,\beta>-1/2\,. \qquad \text{(II.15)}$$

Assim, a funcional (de Jacobi) associada à medida $\mu_{\alpha,\beta}$ tem a representação integral

$$\langle u,p\rangle = \int_0^{2\pi} p(e^{i\theta})\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^{2\alpha}\left|\cos\frac{\theta}{2}\right|^{2\beta} d\theta$$

e verifica a equação distibucional $\mathcal{D}(Au)=Bu$, com

$$A(z)=z^2-1,\ \ B(z)=i\left((\alpha+\beta+2)z^2+2(\alpha-\beta)z+\alpha+\beta\right)\ .$$

3. Funcionais hermitianas tipo Laguerre-Hahn

DEFINIÇÃO II.3. Seja $u\in\mathcal{R}$ e F a respectiva função formal de Carathéodory não racional. A funcional u (ou F) designa-se por *Laguerre-Hahn* se existirem polinómios A,B,C,D, com $A\neq 0$ e $B\neq 0$, tais que F verifica uma equação diferencial de Riccati

$$zA(z)F'(z)=B(z)F^2(z)+C(z)F(z)+D(z)\,. \qquad \text{(II.16)}$$

A sucessão de polinómios ortogonais relativamente a u designa-se por *sucessão de polinómios ortogonais Laguerre-Hahn.* Se $B=0$, u (ou F) designa-se por *Laguerre-Hahn afim,* e a respectiva sucessão de polinómios ortogonais designa-se por *sucessão de polinómios ortogonais Laguerre-Hahn afim.*

OBSERVAÇÃO . Das condições (II.16), (I.5) e (I.6) resulta que $\mathrm{gr}(D)\leq \max\{\mathrm{gr}(A)-2,\mathrm{gr}(B),\mathrm{gr}(C)\}$.

3.1. Funcionais hermitianas de segundo grau.

Começamos por apresentar a definição de funcional linear hermitiana de segundo grau (ver [**14, 47**]).

DEFINIÇÃO II.4. Seja $u\in\mathcal{R}$ e F a correspondente função formal de Carathéodory não racional. A *funcional u (ou F) é de segundo grau* se existirem polinómios B_1,C_1,D_1, com $B_1\neq 0$, tais que

$$B_1(z)F^2(z)+C_1(z)F(z)+D_1(z)=0\,. \qquad \text{(II.17)}$$

DEFINIÇÃO II.5 ([**14**]). Seja $u \in \mathcal{R}$ e F a correspondente função formal de Carathéodory não racional. A *funcional u (ou F) é de quadrado racional* se for de segundo grau verificando (II.17) com $C_1 = 0$.

OBSERVAÇÃO . Se F verifica (II.17) então

$$F(z) = \frac{-C_1(z) \pm \sqrt{C_1^2(z) - 4B_1(z)D_1(z)}}{2B_1(z)}.$$

Assim, se F for não racional, segue-se que $D_1 \neq 0$ e $C_1^2 - 4B_1D_1 \neq r^2$, $\forall r \in \mathbb{P}$. Por outro lado, se F for não racional e se $C_1 = 0$, então não existe um polinómio $\rho \neq 0$ tal que $-D_1/B_1 = \rho^2$.

A demonstração do teorema que se segue é análoga à demonstração da proposição 2.2 de [**47**] (as equações (II.18) e (II.22) podem ser encontradas em [**52**]).

TEOREMA II.1. *Seja F uma função de Carathéodory de segundo grau que verifica (II.17), $B_1F^2 + C_1F + D_1 = 0$. Então, F verifica*

$$\breve{A}F' = \breve{C}F + \breve{D}\,, \tag{II.18}$$

com

$$\breve{A} = (C_1^2 - 4B_1D_1)B_1 \ \neq 0\,, \tag{II.19}$$

$$\breve{C} = B_1(-C_1C_1' - 2B_1D_1' + 2B_1'D_1) - C_1(B_1'C_1 - 2B_1C_1')\,, \tag{II.20}$$

$$\breve{D} = -B_1C_1D_1' - D_1(B_1'C_1 - 2B_1C_1')\,. \tag{II.21}$$

Além disso, temos que:
a) Se $B_1'C_1 - 2B_1C_1' \neq 0$, então F é Laguerre-Hahn e verifica

$$\hat{A}F' = \hat{B}F^2 + \hat{C}F + \hat{D}\,, \tag{II.22}$$

com

$$\hat{A} = C_1^2 - 4B_1D_1 \ \neq 0\,, \tag{II.23}$$

$$\hat{B} = B_1'C_1 - 2B_1C_1' \ \neq 0\,, \tag{II.24}$$

$$\hat{C} = -C_1C_1' - 2B_1D_1' + 2B_1'D_1\,, \tag{II.25}$$

$$\hat{D} = -C_1D_1'\,. \tag{II.26}$$

b) Se $B_1'C_1 - 2B_1C_1' = 0$ e $-C_1C_1' - 2B_1D_1' + 2B_1'D_1 \neq 0$, então F é Laguerre--Hahn e verifica

$$\hat{A}C_1F' = -B_1\hat{C}F^2 + C_1\hat{D} - D_1\hat{C}, \;\; \hat{A}C_1 \neq 0, \; B_1\hat{C} \neq 0\,, \tag{II.27}$$

se, e somente se, a função F não for de quadrado racional.
c) Se $B_1'C_1 - 2B_1C_1' = 0$ e $-C_1C_1' - 2B_1D_1' + 2B_1'D_1 = 0$, então F é Laguerre--Hahn e verifica

$$D_1\hat{A}F' = -B_1\hat{D}F^2 - C_1\hat{D}F, \;\; D_1\hat{A} \neq 0, \; B_1\hat{D} \neq 0\,. \tag{II.28}$$

Demonstração: Derivando $B_1F^2 + C_1F + D_1 = 0$ obtemos

$$F'(2B_1F + C_1) + B_1'F^2 + C_1'F + D_1' = 0\,. \tag{II.29}$$

Por outro lado,

$$B_1F^2 + C_1F + D_1 = 0 \Leftrightarrow (2B_1F + C_1)(\frac{1}{2}F + \frac{1}{4}\frac{C_1}{B_1}) + D_1 - \frac{1}{4}\frac{C_1^2}{B_1} = 0\,.$$

Se multiplicarmos $(\frac{1}{4}\frac{C_1^2}{B_1} - D_1) - (2B_1F + C_1)(\frac{1}{2}F + \frac{1}{4}\frac{C_1}{B_1}) = 0$ por F' obtemos

$$(\frac{1}{4}\frac{C_1^2}{B_1} - D_1)F' - (2B_1F + C_1)(\frac{1}{2}F + \frac{1}{4}\frac{C_1}{B_1})F' = 0\,.$$

Se usarmos (II.29) na última equação vem que

$$(C_1^2 - 4B_1D_1)F' + (B_1'F^2 + C_1'F + D_1')(2B_1F + C_1) = 0\,.$$

Logo,

$$(C_1^2 - 4B_1D_1)F' = -(C_1B_1' + 2B_1C_1')F^2 - (C_1C_1' + 2B_1D_1')F - D_1'C_1 - 2B_1'FB_1F^2\,.$$

Utilizando (II.17) obtemos (II.22),

$$\hat{A}F' = \hat{B}F^2 + \hat{C}F + \hat{D}\,,$$

com coeficientes (II.23)-(II.26) e $\hat{A} \neq 0$ (pois F não é racional).

De seguida analisamos os casos $\hat{B} \neq 0$ e $\hat{B} = 0$.
<u>Caso $\hat{B} \neq 0$</u>. Se $\hat{B} \neq 0$, segue-se a afirmação a).
<u>Caso $\hat{B} = 0$</u>. Neste caso, (II.22) é dada por

$$\hat{A}F' = \hat{C}F + \hat{D}\,. \tag{II.30}$$

Temos dois sub-casos: $\hat{C} \neq 0$ e $\hat{C} = 0$.
Sub-caso $\hat{C} \neq 0$.
De (II.17) e de (II.30) obtemos

$$\hat{A}C_1F' = -B_1\hat{C}F^2 + C_1\hat{D} - D_1\hat{C} \quad \text{com } B_1\hat{C} \neq 0\,.$$

Uma vez que $\hat{A} \neq 0$, segue-se que a equação anterior é uma equação de Riccati se, e somente se, $C_1 \neq 0$, i.e., se a função F não for de quadrado racional. Assim fica estabelecida a afirmação b) e obtemos (II.27).
Sub-caso $\hat{C} = 0$.
Uma vez que $F \neq 1$, então de (II.30) segue-se que $\hat{D} \neq 0$. Além disso, uma vez que F é não racional, de (II.17) tem-se que $D_1 \neq 0$. Logo, de (II.17) e de (II.30) obtemos

$$D_1\hat{A}F' = -B_1\hat{D}F^2 - C_1\hat{D}F, \text{ com } D_1\hat{A} \neq 0, B_1\hat{D} \neq 0\,,$$

ou seja, obtemos (II.28) e estabelecemos c).

Finalmente, para estabelecer a equação linear de primeira ordem para F, multiplicamos (II.22) por B_1 e utilizarmos (II.17), obtendo

$$\hat{A}B_1F' = (-\hat{B}C_1 + \hat{C}B_1)F + \hat{D}B_1 - \hat{B}D_1\,,$$

ou seja, obtemos (II.18) com os coeficientes (II.19)-(II.21). □

OBSERVAÇÃO . A classe de funcionais Laguerre-Hahn afim é mais extensa que a classe de funcionais de segundo grau, pois existem funcionais Laguerre-Hahn afim que não são de segundo grau. A funcional associada aos polinómios de Jacobi sobre a circunferência de parâmetros α, β tais que $\alpha = \beta = 1/2$ é um exemplo de uma funcional Laguerre-Hahn afim que não é de segundo grau (cf. [**52**]).

O lema e o teorema que se seguem podem ser encontrados em [**52**].

LEMA II.4. *Seja F uma função de Carathéodory que verifica as equações*

$$A_1F' = C_1F + D_1\,, \tag{II.31}$$

$$A_2F' = C_2F + D_2\,. \tag{II.32}$$

Então, verifica-se uma e uma só das seguintes condições:

a) F *é racional;*

b) $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{C_1}{C_2} = \dfrac{D_1}{D_2}$.

Demonstração: Se eliminarmos F' entre (II.31) e (II.32) obtemos

$$(C_1A_2 - C_2A_1)F = D_2A_1 - D_1A_2 \,.$$

Logo, ou

$$C_1A_2 - C_2A_1 \neq 0 \ \text{ e } \ D_2A_1 - D_1A_2 \neq 0 \,,$$

donde se segue que F é racional, ou

$$C_1A_2 - C_2A_1 = 0 \ \text{ e } \ D_2A_1 - D_1A_2 = 0 \,,$$

donde se segue que $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{C_1}{C_2} = \dfrac{D_1}{D_2}$. □

OBSERVAÇÃO . Se $C_1 = 0$ (respectivamente $C_2 = 0$) temos que $C_2 = 0$ (respectivamente $C_1 = 0$) e a condição b) é dada por $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{D_1}{D_2}$; se $D_1 = 0$ (respectivamente $D_2 = 0$) temos que $D_2 = 0$ (respectivamente $D_1 = 0$) e a condição b) é dada por $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{C_1}{C_2}$.

TEOREMA II.2. *Seja* F *uma função de Carathéodory não racional. Se* F *verificar*

$$A_2F' = C_2F + D_2 \,, A_2 \neq 0 \,, \tag{II.33}$$

$$A_3F' = B_3F^2 + C_3F + D_3 \,, A_3 \neq 0 \,, B_3 \neq 0 \,, \tag{II.34}$$

então F *é de segundo grau e verifica*

$$B_1F^2 + C_1F + D_1 = 0 \,, \tag{II.35}$$

com

$$B_1 = A_2B_3 \ \neq 0 \,, \tag{II.36}$$

$$C_1 = A_2C_3 - C_2A_3 \,, \tag{II.37}$$

$$D_1 = A_2D_3 - D_2A_3 \,. \tag{II.38}$$

Além disso,

$$\frac{(C_1^2-4B_1D_1)B_1}{A_2}=\frac{B_1(-C_1C_1'-2B_1D_1'+2B_1'D_1)-C_1(B_1'C_1-2B_1C_1')}{C_2}$$
$$=\frac{-B_1C_1D_1'-D_1(B_1'C_1-2B_1C_1')}{D_2}\,. \quad \text{(II.39)}$$

Demonstração: Se eliminarmos F' entre (II.33) e (II.34) obtemos (II.35), com os coeficientes (II.36)-(II.38). Além disso, pelo teorema anterior, F verifica uma equação diferencial de primeira ordem, $\breve{A}F'=\breve{C}F+\breve{D}$, com coeficientes dados por (II.19)-(II.21),

$$\begin{aligned}
&\breve{A}=(C_1^2-4B_1D_1)B_1\,,\\
&\breve{C}=B_1(-C_1C_1'-2B_1D_1'+2B_1'D_1)-C_1(B_1'C_1-2B_1C_1')\,,\\
&\breve{D}=-B_1C_1D_1'-D_1(B_1'C_1-2B_1C_1')\,.
\end{aligned}$$

Assim, F verifica a equação diferencial $\breve{A}F'=\breve{C}F+\breve{D}$ e verifica (II.33). Uma vez que F não é racional, pelo lema anterior seguem-se as relações

$$\frac{\breve{A}}{A_2}=\frac{\breve{C}}{C_2}=\frac{\breve{D}}{D_2}\,,$$

ou seja, obtemos (II.39). □

3.2. Estabilidade na classe Laguerre-Hahn.

TEOREMA II.3. *Seja F_1 uma função de Carathéodory não racional que verifica*

$$A_1F_1'=B_1F_1^2+C_1F_1+D_1\,,A_1\neq 0\,, \quad \text{(II.40)}$$

e seja F_2 uma transformação racional-linear de F_1 do tipo

$$F_2=\frac{\alpha_1-\beta_1F_1}{-\alpha_2+\beta_2F_1}\,,\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2\in\mathbb{P}\,,\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1\neq 0\,.$$

Então, F_2 verifica

$$A_2F_2'=B_2F_2^2+C_2F_2+D_2\,, \quad \text{(II.41)}$$

com

$$A_2 = -(\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)A_1 \neq 0\,, \tag{II.42}$$

$$B_2 = (\alpha_2\beta_2' - \alpha_2'\beta_2)A_1 + \alpha_2^2 B_1 + \alpha_2\beta_2 C_1 + \beta_2^2 D_1\,, \tag{II.43}$$

$$C_2 = (\alpha_2\beta_1' + \alpha_1\beta_2' - \alpha_2'\beta_1 - \alpha_1'\beta_2)A_1 + 2\alpha_1\alpha_2 B_1 + (\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1)C_1 + 2\beta_1\beta_2 D_1\,, \tag{II.44}$$

$$D_2 = (\alpha_1\beta_1' - \alpha_1'\beta_1)A_1 + \alpha_1^2 B_1 + \alpha_1\beta_1 C_1 + \beta_1^2 D_1\,. \tag{II.45}$$

Assim, se F_2 for uma função de Carathéodory e se

$$(\alpha_2\beta_2' - \alpha_2'\beta_2)A_1 + \alpha_2^2 B_1 + \alpha_2\beta_2 C_1 + \beta_2^2 D_1 \neq 0\,, \tag{II.46}$$

então F_2 é Laguerre-Hahn.

Demonstração: Verifica-se que $F_2 = \dfrac{\alpha_1 - \beta_1 F_1}{-\alpha_2 + \beta_2 F_1} \Leftrightarrow F_1 = \dfrac{\alpha_1 + \alpha_2 F_2}{\beta_1 + \beta_2 F_2}$. Se substituirmos $F_1 = \dfrac{\alpha_1 + \alpha_2 F_2}{\beta_1 + \beta_2 F_2}$ em (II.40) obtemos

$$A_2 F_2' = B_2 F_2^2 + C_2 F_2 + D_2\,,$$

com os coeficientes dados por (II.42)-(II.45). Logo, se F_2 for função de Carathéodory e se se verificarem as condições $\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 \neq 0$ e (II.46), temos, respectivamente, $A_2 \neq 0$ e $B_2 \neq 0$, donde se segue que F_2 é Laguerre-Hahn. □

OBSERVAÇÃO . Tal como já referimos no capítulo I, em [**50**] são dadas condições suficientes para que uma tranformação racional-linear do tipo indicado de uma função de Carathéodory seja ainda uma função de Carathéodory.

3.3. Exemplos.

3.3.1. *Polinómios associados de primeira espécie.*

COROLÁRIO II.2. *Seja $\{\phi_n\}$ uma SPOM sobre $\mathbb{T}$, $\{\Omega_n\}$ a sucessão de polinómios associados de primeira espécie, e F, F_2 as respectivas funções de Carathéodory. Se F verificar $zAF' = BF^2 + CF + D$, $A \neq 0$, então F_2 verifica*

$$zAF_2' = -DF_2^2 - CF_2 - B\,. \tag{II.47}$$

Assim, se $D \neq 0$, então F_2 é Laguerre-Hahn.

Demonstração: Se $\{\phi_n\}$ for ortogonal relativamente a F, então $\{\Omega_n\}$ é ortogonal relativamente à função de Carathéodory $F_2 = 1/F$ (cf. corolário I.3). Pelo teorema II.3 temos (II.47) e a conclusão segue-se. □

3.3.2. *Polinómios associados de ordem N.*

COROLÁRIO II.3. *Seja F uma função de Carathéodory, $\{\phi_n\}$ a respectiva SPOM, $\{\Omega_n\}$ a sucessão de polinómios de primeira espécie, e $\{\phi_n^N\}$ a sucessão de polinómios associados de $\{\phi_n\}$ de ordem N. Sejam F, F^N as funções de Carathéodory associadas a $\{\phi_n\}$ e $\{\phi_n^N\}$, respectivamente. Se F verificar $zAF' = BF^2 + CF + D,\ A \neq 0$, então F^N verifica*

$$A_N \left(F^N\right)' = B_N \left(F^N\right)^2 + C_N F^N + D_N \,,$$

com

$$\begin{aligned}
A_N &= 4h_N A\, z^{N+1}\,, \\
B_N &= \{(\Omega_N + \Omega_N^*)'(\phi_N - \phi_N^*) - (\phi_N - \phi_N^*)'(\Omega_N + \Omega_N^*)\}\, zA \\
&\qquad + (\Omega_N + \Omega_N^*)^2 B - (\Omega_N + \Omega_N^*)(\phi_N - \phi_N^*)C + (\phi_N - \phi_N^*)^2 D\,, \\
C_N &= 2\,\{\phi_N'\Omega_N + (\phi_N^*)'\Omega_N^* - \Omega_N'\phi_N - (\Omega_N^*)'\phi_N^*\}\, zA \\
&\qquad - 2(\Omega_N^2 - (\Omega_N^*)^2)B + 2(\phi_N\Omega_N + \phi_N^*\Omega_N^*)C - 2(\phi_N^2 - (\phi_N^*)^2)D\,, \\
D_N &= \{(\Omega_N - \Omega_N^*)'(\phi_N + \phi_N^*) - (\Omega_N - \Omega_N^*)(\phi_N + \phi_N^*)'\}\, zA \\
&\qquad + (\Omega_N - \Omega_N^*)^2 B - (\Omega_N - \Omega_N^*)(\phi_N + \phi_N^*)C + (\phi_N + \phi_N^*)^2 D\,,
\end{aligned}$$

e onde $h_N = \prod_{k=1}^{N}(1 - |a_k|^2)$. Assim, se

$$\begin{aligned}
zA\,\{(\Omega_N + \Omega_N^*)'(\phi_N - \phi_N^*) - (\phi_N - \phi_N^*)'(\Omega_N + \Omega_N)^*\} + (\Omega_N + \Omega_N^*)^2 B \\
- (\Omega_N + \Omega_N^*)(\phi_N - \phi_N^*)C + (\phi_N - \phi_N^*)^2 D \neq 0\,, \quad \text{(II.48)}
\end{aligned}$$

então F^N é Laguerre-Hahn.

Demonstração: De (I.43) temos $F^N = \dfrac{(\Omega_N - \Omega_N^*) + (\phi_N + \phi_N^*)F}{(\Omega_N + \Omega_N^*) + (\phi_N - \phi_N^*)F}$. Pelo teorema II.3 temos

$$A_N \left(F^N\right)' = B_N \left(F^N\right)^2 + C_N F^N + D_N \,,$$

com $A_N = 2zA\,(\Omega_N\phi_N^* + \Omega_N^*\phi_N)$ e os coeficientes acima indicados.

Uma vez que $\Omega_N\phi_N^* + \Omega_N^*\phi_N = 2h_N z^N$, com $h_N = \prod_{k=1}^{N}(1-|a_k|^2)$ (cf. (I.15)), obtemos que $A_N = 4h_N A z^{N+1}$, donde $A_N \neq 0$. Se (II.48), então $B_N \neq 0$, donde se segue o enunciado. $\square$

4. Equação distribucional para funcionais hermitianas tipo Laguerre-Hahn

4.1. Resultados auxiliares.

De seguida apresentamos lemas que utilizaremos nas secções seguintes. Utilizaremos a função formal de Carathéodory associada a u definida por (I.10) e, sempre que necessário, denotá-la-emos por F_u.

LEMA II.5. *Seja $u \in \mathcal{R}$ e A, B polinómios. Então,*

$$\langle B(\xi)u, \frac{\xi+z}{\xi-z}\rangle = P_{u,B}(z) + B(z)F_u(z)\,,\ |z| \neq 1\,, \tag{II.49}$$

$$A(z)F_u'(z) = -A'(z)F_u(z) + Q_{u,A}(z) + \frac{1}{iz}\langle \mathcal{D}(Au), \frac{\xi+z}{\xi-z}\rangle\,, \tag{II.50}$$

onde $P_{u,B}$ e $Q_{u,A}$ são polinómios com $\mathrm{gr}(P_{u,B}) = \mathrm{gr}(B)$ *e* $\mathrm{gr}(Q_{u,A}) = \mathrm{gr}(A) - 1$ *definidos por*

$$P_{u,B}(z) = \langle u, \frac{\xi+z}{\xi-z}\,(B(\xi)-B(z))\rangle\,, \tag{II.51}$$

$$Q_{u,A}(z) = -A'(z)c_0 - \langle u, 2\xi \sum_{k=2}^{\mathrm{gr}(A)} \frac{A^{(k)}(z)}{k!}(\xi-z)^{k-2}\rangle\,, \tag{II.52}$$

onde $c_0 = \langle u, 1\rangle$.

Demonstração: Em primeiro lugar deduzimos (II.49):

$$\begin{aligned}\langle B(\xi)u, \frac{\xi+z}{\xi-z}\rangle &= \langle u, \frac{\xi+z}{\xi-z}B(\xi)\rangle \\ &= \langle u, \frac{\xi+z}{\xi-z}\,(B(\xi)-B(z))\rangle + B(z)\langle u, \frac{\xi+z}{\xi-z}\rangle\end{aligned}$$

Uma vez que $\langle u, \frac{\xi+z}{\xi-z}\,(B(\xi)-B(z))\rangle$ é um polinómio em z (de grau igual ao grau de B), obtemos (II.49) com $P_{u,B}$ dado por (II.51).

Para obter (II.50) procedemos da seguinte forma:

$$\begin{aligned} A(z)F'_u(z) &= \langle u, \frac{2\xi}{(\xi-z)^2}A(z)\rangle \\ &= -\langle u, \frac{2\xi}{(\xi-z)^2}(A(\xi)-A(z))\rangle + \langle u, \frac{2\xi A(\xi)}{(\xi-z)^2}\rangle \\ &= -\langle u, 2\xi\sum_{k=1}^{\mathrm{gr}(A)}\frac{A^{(k)}(z)}{k!}(\xi-z)^{k-2}\rangle + \langle u, \frac{2\xi A(\xi)}{(\xi-z)^2}\rangle\,. \end{aligned}$$

Mas

$$\sum_{k=1}^{\mathrm{gr}(A)}\frac{A^{(k)}(z)}{k!}(\xi-z)^{k-2} = \frac{A'(z)}{\xi-z} + \sum_{k=2}^{\mathrm{gr}(A)}\frac{A^{(k)}(z)}{k!}(\xi-z)^{k-2}\,,$$

donde,

$$A(z)F'_u(z) = -A'(z)\langle u, \frac{2\xi}{\xi-z}\rangle - \langle u, 2\xi\sum_{k=2}^{\mathrm{gr}(A)}\frac{A^{(k)}(z)}{k!}(\xi-z)^{k-2}\rangle + \langle u, \frac{2\xi A(\xi)}{(\xi-z)^2}\rangle\,.$$

Logo,

$$\begin{aligned} &A(z)F'_u(z) \\ &= -A'(z)F_u(z) - A'(z)c_0 - \langle u, 2\xi\sum_{k=2}^{\mathrm{gr}(A)}\frac{A^{(k)}(z)}{k!}(\xi-z)^{k-2}\rangle + \frac{1}{z}\langle u, \frac{2z\xi A(\xi)}{(\xi-z)^2}\rangle\,. \end{aligned}$$

Uma vez que

$$\langle u, \frac{2z\xi A(\xi)}{(\xi-z)^2}\rangle = -\langle A(\xi)u, \xi\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\xi+z}{\xi-z}\right)\rangle\,,$$

obtemos, utilizando a definição do operador $\mathcal{D}$,

$$A(z)F'_u(z) = -A'(z)F_u(z) + Q_{u,A}(z) + \frac{1}{iz}\langle\mathcal{D}(Au), \frac{\xi+z}{\xi-z}\rangle\,,$$

com $Q_{u,A}$ dado por (II.52). $\square$

OBSERVAÇÃO . Sendo $\alpha\in\mathbb{C}$ e $B, \tilde{B}$ polinómios, de (II.51) temos que

$$\begin{aligned} P_{u,B+\tilde{B}} &= P_{u,B} + P_{u,\tilde{B}}\,, \\ P_{u,\alpha B} &= \alpha P_{u,B}\,. \end{aligned}$$

O lema seguinte é uma generalização do teorema 3.4 de [**3**].

LEMA II.6. *Seja u uma funcional linear hermitiana. Se existirem polinómios A, B, C, H tais que $\mathcal{D}(Au) = Bu^2 + Cu + H\,\mathcal{L}_0$, onde $\mathcal{L}_0$ é a funcional de Lebesgue, então*

$$\mathcal{D}(A+\overline{A})u = (B+\overline{B})u^2 + (C+\overline{C})u + (H+\overline{H})\,\mathcal{L}_0\ . \tag{II.54}$$

Além disso, a equação (II.54) é equivalente à equação distibucional de coeficientes polinomiais

$$\mathcal{D}(A_1u) = B_1u^2 + (C_1 + isA_1)u + H_1\,\mathcal{L}_0\,, \tag{II.55}$$

com A_1, B_1, C_1, H_1 dados por

$$A_1(z) = z^s\left(A(z) + \overline{A}(1/z)\right)\,, \tag{II.56}$$

$$B_1(z) = z^s\left(B(z) + \overline{B}(1/z)\right)\,, \tag{II.57}$$

$$C_1(z) = z^s\left(C(z) + \overline{C}(1/z)\right)\,, \tag{II.58}$$

$$H_1(z) = z^s\left(H(z) + \overline{H}(1/z)\right)\,. \tag{II.59}$$

onde $s = \max\{\mathrm{gr}(A), \mathrm{gr}(B), \mathrm{gr}(C), \mathrm{gr}(H)\}$.

Demonstração: Parte 1. Se $\mathcal{D}(Au) = Bu^2 + Cu + H\,\mathcal{L}_0$, então

$$\langle \mathcal{D}(Au), \xi^k\rangle = \langle Bu^2 + Cu + H\,\mathcal{L}_0, \xi^k\rangle,\ \forall k\in\mathbb{Z}\,.$$

Aplicando conjugados, segue-se

$$\langle \mathcal{D}(\overline{A}u), \xi^{-k}\rangle = \langle \overline{B}u^2 + \overline{C}u + \overline{H}\,\mathcal{L}_0, \xi^{-k}\rangle,\ \forall k\in\mathbb{Z}\,.$$

Logo, obtemos

$$\langle \mathcal{D}((A+\overline{A})u), \xi^n\rangle = \langle (B+\overline{B})u^2 + (C+\overline{C})u + (H+\overline{H})\,\mathcal{L}_0, \xi^n\rangle,\ \forall n\in\mathbb{Z}\,,$$

e (II.54) segue-se.

Parte 2. Mostremos a equivalência entre (II.54) e (II.55).

Se u verificar (II.54), então, $\forall k\in\mathbb{Z}$,

$$\langle \mathcal{D}((A+\overline{A})u), \xi^k\rangle = \langle (B+\overline{B})u^2, \xi^k\rangle + \langle (C+\overline{C})u, \xi^k\rangle + \langle (H+\overline{H})\,\mathcal{L}_0, \xi^k\rangle\,,$$

ou seja,

$$\begin{aligned} -ik\langle u, (A(\xi)+\overline{A}(1/\xi))\xi^k\rangle &= \langle u^2, (B(\xi)+\overline{B}(1/\xi))\xi^k\rangle \\ &\quad + \langle (C(\xi)+\overline{C}(1/\xi))\xi^k\rangle + \langle \mathcal{L}_0, (H(\xi)+\overline{H}(1/\xi))\xi^k\rangle,\ \forall k\in\mathbb{Z}\,. \end{aligned}$$

Se $s=\max\{\mathrm{gr}(A),\mathrm{gr}(B),\mathrm{gr}(C),\mathrm{gr}(H)\}$, a útima equação é dada por

$$\begin{aligned}&-ik\langle u,\xi^s(A(\xi)+\overline{A}(1/\xi))\xi^{k-s}\rangle=\langle u^2,\xi^s(B(\xi)+\overline{B}(1/\xi))\xi^{k-s}\rangle\\&+\langle u,\xi^s(C(\xi)+\overline{C}(1/\xi))\xi^{k-s}\rangle+\langle\mathcal{L}_0,\xi^s(H(\xi)+\overline{H}(1/\xi))\xi^{k-s}\rangle,\ \forall k\in\mathbb{Z}\,.\end{aligned}\tag{II.60}$$

Consideremos $m=k-s$ e A_1,B_1,C_1,H_1 os polinómios dados por (II.56)-(II.59). Deste modo, a equação (II.60) é dada por, $\forall m\in\mathbb{Z}$,

$$-i(s+m)\langle u,A_1(\xi)\xi^m\rangle=\langle u^2,B_1(\xi)\xi^m\rangle+\langle u,C_1(\xi)\xi^m\rangle+\langle\mathcal{L}_0,H_1(\xi)\xi^m\rangle\,,$$

ou seja, $\forall m\in\mathbb{Z}$,

$$-im\langle u,A_1(\xi)\xi^m\rangle=\langle u^2,B_1(\xi)\xi^m\rangle+\langle u,(C_1(\xi)+isA_1(\xi))\xi^m\rangle+\langle\mathcal{L}_0,H_1(\xi)\xi^m\rangle\,.$$

Pela definição do operador $\mathcal{D}$, a equação anterior é equivalente a

$$\langle\mathcal{D}(A_1u),\xi^m\rangle=\langle B_1u^2,\xi^m\rangle+\langle(C_1+isA_1)u,\xi^m\rangle+\langle H_1\,\mathcal{L}_0,\xi^m\rangle,\ \forall m\in\mathbb{Z}\,,$$

e obtemos (II.55).

Reciprocamente, se u verificar (II.55), então, pela Parte 1, u verifica

$$\begin{aligned}\mathcal{D}(A_1+\overline{A}_1)u&=(B_1+\overline{B}_1)u^2\\&+(C_1+isA_1+(\overline{C_1+isA_1}))u+(H_1+\overline{H}_1)\,\mathcal{L}_0\,.\end{aligned}\tag{II.61}$$

Se tivermos em atenção que

$$\begin{aligned}&A_1+\overline{A_1}=p_s(A+\overline{A}),\ B_1+\overline{B_1}=p_s(B+\overline{B}),\ H_1+\overline{H_1}=p_s(H+\overline{H})\,,\\&\qquad C_1+isA_1+\overline{C_1+isA_1}=p_s(C+\overline{C})+iz\,p_s'(A+\overline{A})\,,\end{aligned}$$

onde $p_s=z^s+z^{-s}$, de (II.61) obtemos que, $\forall k\in\mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned}&-i\langle(A+\overline{A})u,kp_s\,z^k\rangle=\langle(B+\overline{B})u^2,p_s\,z^k\rangle+\langle(C+\overline{C})u,p_s\,z^k\rangle\\&\qquad+i\langle(A+\overline{A})u,zp_s'\,z^k\rangle+\langle(H+\overline{H})\,\mathcal{L}_0,p_s\,z^k\rangle\,.\end{aligned}\tag{II.62}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}&-i\langle(A+\overline{A})u,z\,(p_s\,z^k)'\rangle=\langle(B+\overline{B})u^2,p_s\,z^{-k}\rangle\\&\qquad+\langle(C+\overline{C})u,p_s\,z^k\rangle+\langle(H+\overline{H})\,\mathcal{L}_0,p_s\,z^k\rangle\,,\forall k\in\mathbb{Z}\,.\end{aligned}$$

De acordo com a definição de $\mathcal{D}$, temos

$$\langle \mathcal{D}(A+\overline{A})u, p_s\, z^k\rangle = \langle (B+\overline{B})u^2, p_s\, z^k\rangle$$
$$+ \langle (C+\overline{C})u, p_s\, z^k\rangle + \langle (H+\overline{H})\,\mathcal{L}_0, p_s\, z^k\rangle\,,\ \forall k\in\mathbb{Z}\,.$$

Uma vez que $\left\{p_s z^k\,, k\in\mathbb{Z}\right\}$ é uma base de Λ, então u verifica (II.54). $\square$

OBSERVAÇÃO . Do lema anterior conclui-se que se u verificar uma equação distribucional com coeficientes polinomiais $\mathcal{D}(Au) = Bu^2 + Cu + H\,\mathcal{L}_0$, então u também verifica uma outra equação distribucional com coeficientes polinomiais, $\mathcal{D}(A_1 u) = B_1 u^2 + (C_1 + isA_1)u + H_1\,\mathcal{L}_0$, em que os polinómios A_1, B_1, C_1 e H_1 são, a menos de um factor $z^\mu, \mu\in\mathbb{Z}$, auto-recíprocos. Efectivamente, se escrevermos $s_1 = \mathrm{gr}(A)$, $s_2 = \mathrm{gr}(B)$, $s_3 = \mathrm{gr}(C)$, $s_4 = \mathrm{gr}(H)$, temos que

$$A_1^* = z^{s_1-2s}A_1,\ B_1^* = z^{s_2-2s}B_1,\ C_1^* = z^{s_3-2s}C_1, H_1^* = z^{s_4-2s}H_1\,,$$

com $s = \max\{\mathrm{gr}(A), \mathrm{gr}(B), \mathrm{gr}(C), \mathrm{gr}(H)\}$.

LEMA II.7. *Seja $u\in\mathcal{R}$ e F_u a respectiva função de Carathéodory. Se F_u verificar*

$$zAF_u' = BF_u^2 + CF_u + D\,,\ |z|\neq 1\,,$$

então u verifica

$$\langle \mathcal{D}(Au) + L(\xi)u - 2iB(\xi)u^2, \frac{\xi+z}{\xi-z}\rangle = iH(z)\,, \tag{II.63}$$

com

$$L = i\left(-zA' + 2B - C\right)\,, \tag{II.64}$$

$$H = B - 2P_{u^2,B} + P_{u,-zA'+2B-C} - zQ_{u,A} + D\,. \tag{II.65}$$

Demonstração: Se usarmos (II.50) e (II.5) em $zAF_u' = BF_u^2 + CF_u + D$ obtemos

$$-zA'F_u + zQ_{u,A} - i\langle \mathcal{D}(Au), \frac{\xi+z}{\xi-z}\rangle = 2BF_{u^2} - 2BF_u + B + CF_u + D\,,$$

i.e.,

$$(-zA' + 2B - C)F_u - i\langle \mathcal{D}(Au), \frac{\xi+z}{\xi-z}\rangle = 2BF_{u^2} + B + D - zQ_{u,A}\,. \tag{II.66}$$

Por outro lado, de (II.49) temos as igualdades

$(-zA' + 2B - C)F_u = \langle (-\xi A'(\xi) + 2B(\xi) - C(\xi))u, \frac{\xi+z}{\xi-z}\rangle - P_{u,-zA'+2B-C}\,,$

$BF_{u^2} = \langle B(\xi)u^2, \frac{\xi+z}{\xi-z}\rangle - P_{u^2,B}$.
Utilizando estas duas igualdades em (II.66) obtemos

$$\langle (-\xi A'(\xi) + 2B(\xi) - C(\xi))\, u - i\mathcal{D}(Au) - 2B(\xi)u^2, \frac{\xi+z}{\xi-z}\rangle$$
$$= B - 2P_{u^2,B} + P_{u,-zA'+2B-C} - zQ_{u,A} + D\,.$$

Se multiplicarmos por i obtemos

$$\langle \mathcal{D}(Au) + i\,(-\xi A'(\xi) + 2B(\xi) - C(\xi))\, u - 2iB(\xi)u^2, \frac{\xi+z}{\xi-z}\rangle$$
$$= i\,(B - 2P_{u^2,B} + P_{u,-zA'+2B-C} - zQ_{u,A} + D)\ .$$

Logo, obtemos (II.63) com L, H dados por (II.64) e (II.65), respectivamente. $\square$

TEOREMA II.4. *Seja $u \in \mathcal{R}$ e F_u a respectiva função de Carathéodory. Se F_u verificar*

$$zAF_u' = BF_u^2 + CF_u + D\,,\ |z| < 1\,, \tag{II.67}$$

então u verifica a equação distribucional de coeficientes polinomiais

$$\mathcal{D}(A_1u) = B_1u^2 + (isA_1 - L_1)u + H_1\,\mathcal{L}_0\,, \tag{II.68}$$

onde $s = \max\{\mathrm{gr}(A), \mathrm{gr}(B), \mathrm{gr}(L), \mathrm{gr}(H)\}$,

$$A_1(z) = z^s(A(z) + \overline{A}(1/z)),\ B_1(z) = z^s(2iB(z) + \overline{2iB}(1/z))\,,$$
$$L_1(z) = z^s(L(z) + \overline{L}(1/z)),\ H_1(z) = z^s(iH(z) + \overline{iH}(1/z))\,,$$

e L, H são definidos por (II.64) e (II.65), respectivamente.

Demonstração: Se F verifica $zAF_u' = BF_u^2 + CF_u + D$, $|z| < 1$, então, pelo lema (II.7), obtemos (II.63),

$$\langle \mathcal{D}(Au) + L(\xi)u - 2iB(\xi)u^2, \frac{\xi+z}{\xi-z}\rangle = iH(z)\,.$$

Se aplicarmos conjugados e a transformação $Z = 1/z$ à equação anterior obtemos

$$\langle \mathcal{D}(\overline{A}u) + \overline{L}u - \overline{2iB}u^2, \frac{\overline{\xi}+1/z}{\overline{\xi}-1/z}\rangle = -i\overline{H}(1/z)$$

i.e.,

$$\langle \mathcal{D}(\overline{A}u) + \overline{L}u - \overline{2iB}u^2, -\frac{1/\xi+1/z}{1/\xi-1/z}\rangle = i\overline{H}(1/z)\,.$$

Uma vez que
$$-\frac{1/\xi+1/z}{1/\xi-1/z}=\frac{\xi+z}{\xi-z}\,,$$
obtemos
$$\langle\mathcal{D}(\overline{A}u)+\overline{L}u-\overline{2iB}u^2,\frac{\xi+z}{\xi-z}\rangle=i\overline{H}(1/z)\,. \tag{II.69}$$
Somando (II.63) com (II.69) obtemos
$$\langle\mathcal{D}\left((A+\overline{A})u\right)+(L+\overline{L})u-(2iB+\overline{2iB})u^2,\frac{\xi+z}{\xi-z}\rangle=i(H(z)+\overline{H}(1/z))\,.$$
Agpra, se calcularmos os momentos da funcional linear hermitiana
$$\mathcal{D}\left((A+\overline{A})u\right)+(L+\overline{L})u-(2iB+\overline{2iB})u^2$$
(utilizando, para tal, a expansão assimptótica de $\dfrac{\xi+z}{\xi-z}$ em $|z|<1$ e em $|z|>1$) obtemos
$$\mathcal{D}\left((A+\overline{A})u\right)+(L+\overline{L})u-(2iB+\overline{2iB})u^2=(iH+\overline{iH})\,\mathcal{L}_0\,.$$
Do lema II.6 obtemos a equação funcional requerida. □

Se fizermos $B=0$ em (II.67) obtemos o resultado para a classe Laguerre-Hahn afim.

COROLÁRIO II.4. *Seja $u\in\mathcal{R}$. Se F_u verificar*
$$zAF_u'=CF_u+D\,,\ |z|<1\,,$$
então u verifica a equação distribucional de coeficientes polinomiais
$$\mathcal{D}(A_1u)=(isA_1-L_1)u+H_1\,\mathcal{L}_0\,, \tag{II.70}$$
onde
$$s=\max\{\mathrm{gr}(A),\mathrm{gr}(L),\mathrm{gr}(H)\},\ A_1(z)=z^s(A(z)+\overline{A}(1/z))\,,$$
$$L_1(z)=z^s(L(z)+\overline{L}(1/z)),\ H_1(z)=z^s(iH+\overline{iH}(1/z))\,,$$
$$L(z)=i\left(-zA'(z)-C(z)\right),\ H(z)=P_{u,-zA'-C}(z)-zQ_{u,A}(z)+D(z)\,.$$

4.2. Teorema de caracterização: a equação distribucional.

Finalmente, estabelecemos o principal resultado deste capítulo.

TEOREMA II.5. *Seja $u \in \mathcal{R}$ e F_u a respectiva função de Carathéodory. A funcional u verifica a equação distribucional de coeficientes polinomiais*

$$\mathcal{D}(Au) = Bu^2 + Cu + \xi H\, \mathcal{L}_0\,, \tag{II.71}$$

onde $\mathcal{L}_0$ é a funcional de Lebesgue, se, e somente se, F_u verificar as equações diferenciais de coeficientes polinomiais

$$\begin{aligned} zAF_u' = -\frac{iB}{2}F_u^2 + (-zA' - iB - iC)F_u + \frac{iB}{2} - iP_{u^2,B} \\ + zQ_{u,A} - iP_{u,C} - 2izH\mathbb{I} \end{aligned} \tag{II.72}$$

com $\mathbb{I}(z) = \begin{cases} 1, & |z| < 1 \\ 0, & |z| > 1\,. \end{cases}$

Demonstração: Seja u tal que $\mathcal{D}(Au) = Bu^2 + Cu + \xi H\, \mathcal{L}_0$. Se substituirmos $\mathcal{D}(Au)$ por $Bu^2 + Cu + \xi H\, \mathcal{L}_0$ em (II.50) obtemos

$$zA(z)F'(z) = -zA'(z)F(z) + zQ_{u,A}(z) - i\langle Bu^2 + Cu + \xi H\, \mathcal{L}_0, \frac{\xi+z}{\xi-z}\rangle\,,$$

i.e.,

$$\begin{aligned} &zA(z)F_u'(z) \\ &= -zA'(z)F_u + zQ_{u,A}(z) - i\langle Bu^2, \frac{\xi+z}{\xi-z}\rangle - i\langle Cu, \frac{\xi+z}{\xi-z}\rangle - i\langle \xi H\, \mathcal{L}_0, \frac{\xi+z}{\xi-z}\rangle\,. \end{aligned}$$

De (II.49) segue-se

$$\begin{aligned} zA(z)F_u' = -zA'(z)F_u + zQ_{u,A}(z) - i\left\{P_{u^2,B} + B(z)F_{u^2}\right\} \\ - i\left\{P_{u,C} + C(z)F_u\right\} - i\langle \xi H\, \mathcal{L}_0, \frac{\xi+z}{\xi-z}\rangle\,. \end{aligned} \tag{II.73}$$

Uma vez que

$$\langle \xi H\, \mathcal{L}_0, \frac{\xi+z}{\xi-z}\rangle = 2zH(z)\mathbb{I}(z)\,,$$

então, em $|z| < 1$, (II.73) é equivalente a

$$\begin{aligned} &zA(z)F_u' \\ &= -iB(z)F_{u^2} + (-zA'(z) - iC(z))F_u + zQ_{u,A}(z) - iP_{u^2,B}(z) - iP_{u,C}(z) - 2izH(z) \end{aligned}$$

e, em $|z| > 1$, (II.73) é equivalente a

$$zA(z)F'_u = -iB(z)F_{u^2} + (-zA'(z) - iC(z))F_u + zQ_{u,A}(z) - iP_{u^2,B}(z) - iP_{u,C}(z)\,.$$

Se utilizarmos (II.5) obtemos (II.72).

Reciprocamente, se F_u verifica, em $|z| < 1$,

$$\begin{aligned} zAF'_u = -\frac{iB}{2}F_u^2 + (-zA' - iB - iC)F_u + \frac{iB}{2} - iP_{u^2,B} \\ + zQ_{u,A}(z) - iP_{u,C}(z) + E(z)\,, \end{aligned}$$

então, de (II.63), obtemos

$$\langle V, \frac{\xi + z}{\xi - z}\rangle = 2zH(z)\mathbb{I}(z), \quad V = \mathcal{D}(Au) - Bu^2 - Cu\,.$$

Considerando a expansão assimptótica de $\dfrac{\xi + z}{\xi - z}$ em $|z| < 1$ e em $|z| > 1$, obtemos, respectivamente,

$$\langle V, 1 + 2\sum_{k=1}^{+\infty} \xi^{-k} z^k\rangle = 2zH(z)\,,\ |z| < 1\,, \tag{II.74}$$

$$\langle V, -1 - 2\sum_{k=1}^{+\infty} \xi^{k} z^{-k}\rangle = 0\,,\ |z| > 1\,. \tag{II.75}$$

Se escrevermos $zH(z) = p_1 z + ... + p_l z^l$, então, de (II.74), obtemos

$$\langle V, 1\rangle = 0\,,$$

$$\langle V, \xi^{-k}\rangle = p_k\,,\ k = 1, ..., l\,, \tag{II.76}$$

$$\langle V, \xi^{-k}\rangle = 0\,,\ k \geq l + 1\,, \tag{II.77}$$

e de (II.75) obtemos

$$\langle V, 1\rangle = 0\,, \tag{II.78}$$

$$\langle V, \xi^{k}\rangle = 0,\ k \geq 1\,. \tag{II.79}$$

Finalmente, de (II.76)-(II.79), conclui-se que $V = \xi H\,\mathcal{L}_0$, e obtemos (II.71). □

Fazendo $B = 0$ em (II.71) e (II.72) obtemos o resultado seguinte para a classe Laguerre-Hahn afim (ver [**10**, teorema 2] e ver também [**52**, pg. 74]).

COROLÁRIO II.5. *Seja* $u \in \mathcal{R}$ *e* F_u *a respectiva função de Carathéodory.* u *verifica* $\mathcal{D}(Au) = Cu + \xi H(\xi)\mathcal{L}_0$, *se, e somente se,* F *verificar, para* $|z| \neq 1$,

$$zA(z)F'(z) = \left(-zA'(z) - iC(z)\right)F(z) + zQ_{u,A}(z) - iP_{u,C}(z) - 2izH(z)\mathbb{I}(z)\,.$$

Obtemos a seguinte caracterização para as funcionais hermitianas semi-clássicas (ver [**10**]).

COROLÁRIO II.6. *Seja* F *função de Carathéodory formal associada a* $u \in \mathcal{R}$ *verificando uma equação diferencial com coeficientes polinomiais*

$$zA(z)F'(z) = (-zA'(z) - iC(z))F(z) + P(z) \tag{II.80}$$

em $\{z \in \mathbb{C} : |z| \neq 1\}$. *Uma condição necessária e suficiente para que* u *seja semi-clássica e verifique a equação distribucional* $\mathcal{D}(Au) = Cu$ *é que o polinómio* P *de (II.80) satisfaça*

$$P = zQ_{u,A} - iP_{u,C}\,,$$

sendo $Q_{u,A}$ *e* $P_{u,C}$ *dados por (II.52) e (II.51), respectivamente.*

OBSERVAÇÃO . A função de Carathéodory associada à medida de Jacobi dada por (II.15) verifica a equação diferencial (II.80) com

$$A(z) = z^2 - 1,\; C(z) = i\left((\alpha+\beta+2)\,z^2 + 2(\alpha-\beta)z + \alpha+\beta\right),$$
$$P(z) = (\alpha+\beta)c_0^{\alpha,\beta}(z^2-1)\,.$$

Se utilizarmos as relações para os momentos da medida de Jacobi (ver [**37**])

$$c_0^{\alpha,\beta} = \frac{\Gamma(\alpha+\frac{1}{2})\Gamma(\beta+\frac{1}{2})}{\pi\Gamma(\alpha+\beta+1)}\,,$$
$$c_1^{\alpha,\beta} = \frac{\beta-\alpha}{\alpha+\beta+1}c_0^{\alpha,\beta}\,,$$
$$(\alpha+\beta+k)c_k^{\alpha,\beta} = 2(\beta-\alpha)c_{k-1}^{\alpha,\beta} + (k-2-\alpha-\beta)c_{k-2}^{\alpha,\beta}\,,\; k \in \mathbb{Z}\,,$$

obtemos $P = zQ_{u,A} - iP_{u,C}$.

CAPÍTULO III

Relações diferenciais na classe Laguerre-Hahn

Neste capítulo estabelecemos duas caracterizações para sucessões de polinómios ortogonais sobre a circunferência, associadas a funções de Carathéodory que verificam equações diferenciais do tipo $zAF' = BF^2 + CF + D, \;\; A, B, C, D \in \mathbb{P}$:
C1- em termos de relações de estrutura de primeira ordem;
C2- em termos de equações diferenciais (de coeficientes matriciais) de segunda ordem.

Dada uma função de Carathéodory, F, consideraremos os vectores associados a F definidos por $\psi_n^1 = [\phi_n \;\; -\Omega_n]^T, \;\; \psi_n^2 = [\phi_n^* \; \Omega_n^*]^T, \;\; \mathcal{Q}_n = [-Q_n \; Q_n^*]^T, \; n \geq 0$, com $\{\phi_n\}, \{\Omega_n\}$ e $\{Q_n\}$, respectivamente, a sucessão de polinómios ortogonais mónicos, a sucessão dos polinómios de primeira espécie e a sucessão das funções de segunda espécie relativamente a F (cf. secção I.6).

Para estabelecer a caracterização C1 mostraremos a equivalência entre a equação $zAF' = BF^2 + CF + D$, com $A, B, C, D \in \mathbb{P}$, e

$$\begin{aligned} zA(\psi_n^1)' &= M_{n,1}\psi_n^1 + N_{n,1}\psi_n^2 \\ zAQ_n' &= (l_{n,1} + C/2 + BF)Q_n + \Theta_{n,1}Q_n^*\,, \; n \in \mathbb{N}\,, \end{aligned}$$

onde $M_{n,1}$ e $N_{n,1}$ são matrizes de elementos polinomiais e $l_{n,1}, \Theta_{n,1}$ são polinómios de graus independentes de n. Estas relações de estrutura são uma generalização das relações de estrutura obtidas na secção 3 de [**36**] para a classe semi-clássica real (ver também [**34**]). A caracterização C1 é um resultado central no nosso trabalho, pois no capítulo IV reinterpretaremos estas relações de estrutura em termos de equações matriciais de Sylvester, o que nos permitirá obter uma representação para as respectivas sucessões de polinómios ortogonais.

A caracterização C2 foi motivada pelos trabalhos de Hahn [**27, 28, 29**], onde se estuda a caracterização de sucessões de polinómios ortogonais reais, $\{P_n\}$, através de equações diferenciais lineares de segunda ordem com coeficientes polinomiais. Em [**28, 29**] é estabelecida a equivalência entre uma equação do tipo

$$a_n P_n'' + b_n P_n' + c_n P_n = 0, \;\; a_n, b_n, c_n \in \mathbb{P}\,, n \in \mathbb{N}\,, \tag{III.1}$$

e relações de estrutura de coeficientes polinomiais para $\{P_n\}$,

$$r(x)P_n'(x) = s_n(x)P_n(x) + t_n(x)P_{n-1}(x), \; r, s_n, t_n \in \mathbb{P}\,, n \in \mathbb{N}\,,$$

sendo que, no caso de ortogonalidade real, estas relações de estrutura caracterizam o carácter semi-clássico de $\{P_n\}$ (ver [**7**], por exemplo). Estes resultados estão relacionados com o estudo das singularidades da equação (III.1). Nas condições enunciadas, tem-se que (cf. [**27, 28**]):
a) as singularidades de (III.1) são independentes de n;
b) os zeros do polinómio a_n que dependem de n são singularidades aparentes da equação (III.1).
Em [**27**] Hahn estabelece que a ordem mínima de uma equação diferencial linear para uma sucessão de polinómios ortogonais sobre subconjuntos de $\mathbb{R}$, $\{P_n\}$, pode ser apenas dois ou quatro; mostra que as soluções da equação diferencial de ordem quatro são construídas através das soluções de equações diferenciais de segunda ordem.

Salientamos que no caso de ortogonalidade sobre a circunferência a caracterização de sucessões semi-clássicas, $\{\phi_n\}$, através de equações diferenciais de segunda ordem $A_n\phi_n'' + B_n\phi_n' + C_n\phi_n = 0, \; n \in \mathbb{N}, \; A_n, B_n, C_n \in \mathbb{P}$, é inexistente. Relembramos que Tasis, em [**61**], estabeleceu que se $\{\phi_n\}$ for semi-clássica (logo, ortogonal relativamente a uma função de Carathéodory F que verifica $zAF' = CF + D$, com $A, C, D \in \mathbb{P}$) então $\{\phi_n\}$ verifica $A_n\phi_n'' + B_n\phi_n' + C_n\phi_n = 0, \; n \in \mathbb{N}$, com A_n, B_n, C_n polinómios de graus independentes de n, mas o recíproco ficou em aberto (cf. [**2**]).

Consideremos, então, a classe das funções de Carathéodory que verificam $zAF' = BF^2 + CF + D$, com $A, B, C, D \in \mathbb{P}$. Analogamente ao estabelecido por Hahn para o caso de ortogonalidade sobre subconjuntos de $\mathbb{R}$, também na classe Laguerre-Hahn sobre a circunferência unitária se verifica que as respectivas sucessões de polinómios ortogonais, $\{\phi_n\}$, satisfazem equações diferenciais lineares de quarta ordem,

$$S_n\phi_n^{(iv)} + T_n\phi_n^{(iii)} + U_n\phi_n'' + V_n\phi_n' + Z_n\phi_n = 0\,,\ n \in \mathbb{N}\,,$$

onde S_n, T_n, U_n, V_n, Z_n são polinómios (basta ter em atenção as relações de estrutura obtidas em C1). Mas, por outro lado, e também tendo em atenção a caracterização C1 anteriormente referida, vemos que no caso da classe Laguerre-Hahn sobre a circunferência unitária, no sentido lato, as equações diferenciais que surgem *naturalmente* são equações diferenciais de ordem dois com coeficientes matriciais para $\{\psi_n^1\}$ e para $\{Q_n\}$ (ver lema III.1). Assim, para estabelecer a caracterização C2 mostraremos a equivalência entre $zAF' = BF^2 + CF + D$, com $A, B, C, D \in \mathbb{P}$, e

$$\tilde{\mathcal{A}}_{n,1}\, I(\psi_n^1)'' + \mathcal{B}_{n,1}(\psi_n^1)' + \mathcal{C}_{n,1}(\psi_n^1) = 0_{2\times 1} \tag{III.2}$$

$$\tilde{\mathcal{A}}_{n,1}(Q_n)'' + \tilde{\mathcal{B}}_{n,1}Q_n' + \tilde{\mathcal{C}}_{n,1}Q_n = 0\,, n \in \mathbb{N}\,, \tag{III.3}$$

onde $\mathcal{B}_{n,1}, \mathcal{C}_{n,1}$ são matrizes de elementos polinomiais, $\tilde{\mathcal{B}}_{n,1}, \tilde{\mathcal{C}}_{n,1}$ são funções analíticas no disco unitário, $\tilde{\mathcal{A}}_{n,1}$ é um polinómio e I é a matriz identidade de ordem dois. Em particular, seguem-se as equações diferenciais de segunda ordem obtidas por Tasis para a classe semi-clássica sobre a circunferência em [**61**, pg. 73] (cf. corolário III.2). Analogamente às equações deduzidas por Hahn no caso real, também as equações (III.2) e (III.3) têm as suas singularidades independentes de n, e os zeros do polinómio $\tilde{\mathcal{A}}_{n,1}$ que dependem de n são singularidades aparentes das equações.

Este capítulo está estruturado da forma seguinte: na secção 1 estabelecemos a caracterização C1; na secção 2 estabelecemos a caracterização C2.

Os resultados descritos encontram-se em fase de preparação para submissão (cf. [**12, 13**]).

1. Relações de estrutura de primeira ordem

Começamos por estabelecer um resultado central deste trabalho. Ao longo deste capítulo, I denota a matriz identidade de ordem dois.

TEOREMA III.1. *Sejam $u \in \mathcal{R}$, F a correspondente função de Carathéodory, $\{\psi_n^1\}$, $\{\psi_n^2\}$ as sucessões de vectores associados a u definidos por (I.22) e (I.23),* *respectivamente, e* $\{Q_n\}$ *a sucessão de funções de segunda espécie. As afirmações seguintes são equivalentes:*

a) F *verifica a equação diferencial de coeficientes polinomiais*

$$zAF' = BF^2 + CF + D\,.$$

b) $\{\psi_n^1\}$ *e* $\{Q_n\}$ *verificam*

$$zA(\psi_n^1)' = M_{n,1}\psi_n^1 + N_{n,1}\psi_n^2\,, \tag{III.4}$$

$$zAQ_n' = (l_{n,1} + C/2 + BF)Q_n + \Theta_{n,1}Q_n^* \tag{III.5}$$

onde $M_{n,1}, N_{n,1}$ *são matrizes de elementos polinomiais de graus independentes de* n*, dadas por*

$$M_{n,1} = \begin{bmatrix} l_{n,1} - C/2 & -B \\ D & l_{n,1} + C/2 \end{bmatrix},\; N_{n,1} = -\Theta_{n,1}\, I.$$

c) $\{\psi_n^2\}$ *e* $\{Q_n^*\}$ *verificam*

$$zA(\psi_n^2)' = N_{n,2}\psi_n^1 + M_{n,2}\psi_n^2\,, \tag{III.6}$$

$$zA(Q_n^*)' = (l_{n,2} + C/2 + BF)\, Q_n^* + \Theta_{n,2}Q_n\,, \tag{III.7}$$

onde $M_{n,2}, N_{n,2}$ *são matrizes de elementos polinomiais de graus independentes de* n*, dadas por*

$$M_{n,2} = \begin{bmatrix} l_{n,2} - C/2 & -B \\ D & l_{n,2} + C/2 \end{bmatrix},\; N_{n,2} = -\Theta_{n,2}\, I.$$

Demonstração: Utilizaremos o seguinte esquema: $a) \Leftrightarrow b)$ e $a) \Leftrightarrow c)$.

$a) \Leftrightarrow b)$:

Em primeiro lugar deduzimos as equações (III.4).

Se substituirmos (I.16) em $zAF' = BF^2 + CF + D$ obtemos

$$zA\left(\frac{Q_n}{\phi_n} - \frac{\Omega_n}{\phi_n}\right)' = B\left(\frac{Q_n}{\phi_n} - \frac{\Omega_n}{\phi_n}\right)^2 + C\left(\frac{Q_n}{\phi_n} - \frac{\Omega_n}{\phi_n}\right) + D\,,$$

ou seja,

$$zA\left(\frac{Q_n}{\phi_n}\right)' - B\frac{Q_n}{\phi_n}\left(\frac{Q_n}{\phi_n} - 2\frac{\Omega_n}{\phi_n}\right) - C\frac{Q_n}{\phi_n}$$
$$= zA\left(\frac{\Omega_n}{\phi_n}\right)' + B\left(\frac{\Omega_n}{\phi_n}\right)^2 - C\left(\frac{\Omega_n}{\phi_n}\right) + D\,,$$

donde se segue

$$\left\{ zA\left(\frac{\Omega_n}{\phi_n}\right)' + B\left(\frac{\Omega_n}{\phi_n}\right)^2 - C\left(\frac{\Omega_n}{\phi_n}\right) + D \right\}\phi_n^2 = \tilde{\Theta}_n\,, \tag{III.8}$$

com

$$\tilde{\Theta}_n = \left\{ zA\left(\frac{Q_n}{\phi_n}\right)' - B\frac{Q_n}{\phi_n}\left(\frac{Q_n}{\phi_n} - 2\frac{\Omega_n}{\phi_n}\right) - C\frac{Q_n}{\phi_n} \right\}\phi_n^2\,.$$

Uma vez que o primeiro membro de (III.8) é um polinómio, segue-se que $\tilde{\Theta}_n$ também é um polinómio. Da análise assimptótica de Q_n em $|z| < 1$ (cf. lema I.6) deduz-se que

$$\tilde{\Theta}_n(z) = z^n\tilde{\Theta}_n^1(z),\ \tilde{\Theta}_n^1 \in \mathbb{P},$$

e da expansão assimptótica de Q_n em $|z| > 1$ (cf. lema I.6) resulta que $\tilde{\Theta}_n^1$ tem grau limitado,

$$\mathrm{gr}(\tilde{\Theta}_n^1) = \max\{\mathrm{gr}(zA) - 2, \mathrm{gr}(B) - 1, \mathrm{gr}(C) - 1\},\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Logo, a equação (III.8) é equivalente a

$$\left\{ zA\left(\frac{\Omega_n}{\phi_n}\right)' + B\left(\frac{\Omega_n}{\phi_n}\right)^2 - C\left(\frac{\Omega_n}{\phi_n}\right) + D \right\}\phi_n^2 = z^n\tilde{\Theta}_n^1\,.$$

Usando (I.15), $2h_n z^n = \phi_n\Omega_n^* + \Omega_n\phi_n^*$, na última equação obtemos

$$\left\{ zA\left(\frac{\Omega_n}{\phi_n}\right)' + B\left(\frac{\Omega_n}{\phi_n}\right)^2 - C\left(\frac{\Omega_n}{\phi_n}\right) + D \right\}\phi_n^2 = \Theta_{n,1}(\phi_n\Omega_n^* + \Omega_n\phi_n^*)\,,$$

com $\Theta_{n,1} = \tilde{\Theta}_n^1/2h_n$. Consequentemente,

$$\left\{ zA\Omega_n' - \frac{C}{2}\Omega_n + D\phi_n - \Theta_{n,1}\Omega_n^* \right\}\phi_n = \left\{ zA\phi_n' + \frac{C}{2}\phi_n - B\Omega_n + \Theta_{n,1}\phi_n^* \right\}\Omega_n\,.$$

Distinguiremos os casos seguintes (ver lema I.7):

i) ϕ_n e Ω_n não têm zeros comuns, $\forall n \in \mathbb{N}$, i.e., $\phi_n(0) \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}$;

ii) Existe um número finito de índices $k \in \mathbb{N}$ tais que ϕ_k e Ω_k têm zeros comuns, i.e., $\phi_k(0) = \Omega_k(0) = 0$ para um número finito de índices k;

iii) Existe $n_0 > 1$ tal que $\phi_n(0) = 0,\ \forall n \geq n_0$.

Caso i): Se ϕ_n e Ω_n não tiverem zeros comuns, $\forall n \in \mathbb{N}$, conclui-se que existe um polinómio $l_{n,1}$ tal que, $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{cases} zA\phi_n' + \frac{C}{2}\phi_n - B\Omega_n + \Theta_{n,1}\phi_n^* = l_{n,1}\phi_n \\ zA\Omega_n' - \frac{C}{2}\Omega_n + D\phi_n - \Theta_{n,1}\Omega_n^* = l_{n,1}\Omega_n \,, \end{cases} \tag{III.9}$$

e obtemos (III.4). Além disso, o grau de $l_{n,1}$ é limitado,

$$\mathrm{gr}(l_{n,1}) = \max\{\mathrm{gr}(A), \mathrm{gr}(B), \mathrm{gr}(C), \mathrm{gr}(D)\}, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Caso ii): Suponhamos que $\phi_1(0) \neq 0, \ldots, \phi_{k-1}(0) \neq 0$, e k é o primeiro índice tal que $\phi_k(0) = 0$. Então, ϕ_n e Ω_n não têm zeros em comum para $n = 1, \ldots, k-1$. Do caso i), as equações (III.9) verificam-se para $n = 1, \ldots, k-1$. Agora escrevemos (III.9) para $k-1$ e multiplicamos por z, para obter

$$\begin{cases} z^2A\phi_{k-1}' + \frac{C}{2}z\phi_{k-1} - Bz\Omega_{k-1} + z\Theta_{k-1,1}\phi_{k-1}^* = l_{k-1,1}z\phi_{k-1} \\ z^2A\Omega_{k-1}' - \frac{C}{2}z\Omega_{k-1} + Dz\phi_{k-1} - z\Theta_{k-1,1}\Omega_{k-1}^* = l_{k-1,1}z\Omega_{k-1} \,. \end{cases}$$

Substituindo agora

$$\phi_k(z) = z\phi_{k-1}(z), \ \phi_k^*(z) = \phi_{k-1}^*(z), \ z\phi_{k-1}'(z) = \phi_k'(z) - \phi_{k-1} \,,$$
$$\Omega_k(z) = z\Omega_{k-1}(z), \ \Omega_k^*(z) = \Omega_{k-1}^*(z), \ z\Omega_{k-1}'(z) = \Omega_k'(z) - \Omega_{k-1} \,,$$

nas equações anteriores obtemos

$$\begin{cases} zA\phi_k' + \frac{C}{2}\phi_k - B\Omega_k + z\Theta_{k-1,1}\phi_k^* = (l_{k-1,1} + A)\,\phi_k \\ zA\Omega_k' - \frac{C}{2}\Omega_k + D\phi_k - z\Theta_{k-1,1}1\Omega_k^* = (l_{k-1,1} + A)\Omega_k \,, \end{cases}$$

e obtemos as equações (III.4) para $n = k$ com $l_{k,1} = l_{k-1,1} + A$ e $\Theta_{k,1} = z\Theta_{k-1,1}$. Além disso, se $\phi_{k+1}(0) = \cdots = \phi_{k+k_0}(0) = 0$, e $\phi_{k+k_0+1}(0) \neq 0$ para algum $k_0 \in \mathbb{N}$, se utilizarmos o mesmo método que anteriormente obtemos (III.4) para $n = k+1, \ldots, k+k_0$, com $l_{n,1}$ e $\Theta_{n,1}$ dados por

$$l_{n,1} = l_{k-1,1} + (n-k+1)A, \ \ \Theta_{n,1} = z^{n-k+1}\Theta_{k-1,1}, \ \ n = k+1, \ldots, k+k_0 \,.$$

Caso iii): Se $\phi_n(0) = 0$, $\forall n \geq n_0$, então ϕ_n e Ω_n são polinómios do tipo Bernstein--Szegő, ou seja,

$$\phi_n(z) = z^{n-n_0+1}\phi_{n_0-1}(z) \,, \ \Omega_n(z) = z^{n-n_0+1}\Omega_{n_0-1}(z) \,.$$

Aplicando o mesmo método que anteriormente conclui-se que as equações (III.4) se verificam, para $n \in \mathbb{N}$, e, para $n \geq n_0$, os polinómios $l_{n,1}$ e $\Theta_{n,1}$ são dados por

$$l_{n,1} = l_{n_0-1} + (n - n_0 + 1)A,\ \Theta_{n,1} = z^{n-n_0+1}\Theta^1_{n_0-1}\,.$$

Deduza-se agora (III.5). Se derivarmos (I.16), $Q_n = \Omega_n + \phi_n F$, obtemos

$$zAQ'_n = zA\Omega'_n + zA\phi'_n F + zAF'\phi_n\,.$$

Se utilizarmos as relações de estrutura (III.4),

$$\begin{cases} zA\phi'_n = (l_{n,1} - \frac{C}{2})\phi_n + B\Omega_n - \Theta_{n,1}\phi^*_n \\ zA\Omega'_n = (l_{n,1} + \frac{C}{2})\Omega_n - D\phi_n + \Theta_{n,1}\Omega^*_n\,, \end{cases}$$

na equação anterior obtemos

$$zAQ'_n = (l_{n,1} + C/2 + BF)(\Omega_n + \phi_n F) + \Theta^1_n(\Omega^*_n - \phi^*_n F)\,.$$

Da representação (I.16) e (I.17) resulta a equação (III.5). Fica assim estabelecida a implicação $a) \Rightarrow b)$.

Para demonstrarmos $b) \Rightarrow a)$ utilizamos (I.16) e (I.17) em (III.5). Obtemos

$$zA\left(\Omega'_n + \phi'_n F + \phi_n F'\right) = \left(l_{n,1} + BF + \frac{C}{2}\right)(\Omega_n + F\phi_n) + \Theta_{n,1}(\Omega^*_n - F\phi^*_n)\,.$$

Das equações (III.4) resulta

$$\left\{zAF' - BF^2 - CF - D\right\}\phi_n = 0,\ \forall n \in \mathbb{N},$$

donde $zAF' = BF^2 + CF + D\,.$

$a) \Leftrightarrow c)$:

Analogamente ao efectuado na demonstração de $a) \Rightarrow b)$, se substituirmos a equação (I.17) em $zAF' = BF^2 + CF + D$ e procedermos do mesmo modo que anteriormente, obtemos as equações (III.6). Além disso, $l_{n,2}$ e $\Theta_{n,2}$ têm grau limitado,

$$gr(l_{n,2}) = \max\{\mathrm{gr}(A), \mathrm{gr}(B), \mathrm{gr}(C), \mathrm{gr}(D)\}\,,\ \forall n \in \mathbb{N}\,,$$

$$\mathrm{gr}(\Theta_{n,2}) = \max\{\mathrm{gr}(zA) - 2, \mathrm{gr}(B) - 1, \mathrm{gr}(C) - 1\}\,,\ \forall n \in \mathbb{N}\,.$$

Analogamente se deduz (III.7).

Para demonstrar $c) \Rightarrow a)$ utilizamos (I.16) e (I.17) em (III.7). De (III.6) resulta

$$\left\{zAF' - BF^2 - CF - D\right\} \phi_n^* = 0\,, \ \forall n \in \mathbb{N}\,,$$

donde $zAF' = BF^2 + CF + D$. □

Como consequência, obtemos o corolário seguinte (ver[**10**]).

COROLÁRIO III.1. *Sejam $u \in \mathcal{R}$, F a correspondente função de Carathéodory, $\{\psi_n^1\}$, $\{\psi_n^2\}$ as sucessões de vectores associados a u definidos por (I.22) e (I.23), respectivamente, e $\{Q_n\}$ a sucessão de funções de segunda espécie. As afirmações seguintes são equivalentes:*
a) F verifica a equação diferencial de coeficientes polinomiais

$$zAF' = CF + D\,.$$

b) $\{\psi_n^1\}$ e $\{Q_n\}$ verificam

$$\begin{aligned} zA(\psi_n^1)' &= M_{n,1}\psi_n^1 + N_{n,1}\psi_n^2\,, \\ zAQ_n' &= (l_{n,1} + C/2)\,Q_n + \Theta_{n,1}Q_n^*\,, \end{aligned}$$

onde $M_{n,1}, N_{n,1}$ são matrizes de elementos polinomiais de graus independentes de n, dadas por

$$M_{n,1} = \begin{bmatrix} l_{n,1} - C/2 & 0 \\ D & l_{n,1} + C/2 \end{bmatrix}\,,\ N_{n,1} = -\Theta_{n,1}\,I\,.$$

c) $\{\psi_n^2\}$ e $\{Q_n^*\}$ verificam

$$\begin{aligned} zA(\psi_n^2)' &= N_{n,2}\psi_n^1 + M_{n,2}\psi_n^2\,, \\ zA(Q_n^*)' &= (l_{n,2} + C/2)\,Q_n^* + \Theta_{n,2}Q_n\,, \end{aligned}$$

onde $M_{n,2}, N_{n,2}$ são matrizes de elementos polinomiais de graus independentes de n, dadas por

$$M_{n,2} = \begin{bmatrix} l_{n,2} - C/2 & 0 \\ D & l_{n,2} + C/2 \end{bmatrix}\,,\ N_{n,2} = -\Theta_{n,2}\,I\,.$$

Demonstração: Fazer $B = 0$ em (III.4)-(III.7). □

2. Equação diferencial vectorial de segunda ordem

Nesta secção estabelecemos uma caracterização da classe Laguerre-Hahn (no sentido lato) em termos de equações diferenciais de segunda ordem. Utilizaremos a notação $[\,X\,]_{i,j}$ para indicar o elemento da matriz X na posição $(i,j),\ i,j=1,2$.

Pretendemos estabelecer o seguinte teorema.

TEOREMA III.2. *Sejam $u \in \mathcal{R}$ e F a função de Carathéodory correspondente. Sejam $\{\psi_n^1\}$, $\{\psi_n^2\}$ as sucessões de vectores associados a u dados por (I.22) e (I.23), e $\{Q_n\}$ a sucessão de funções de segunda espécie. As seguintes afirmações são equivalentes:*

a) F verifica a equação diferencial de coeficientes polinomiais

$$zAF' = BF^2 + CF + D\,.$$

b) $\{\psi_n^1\}$ e $\{Q_n\}$ verificam equações diferenciais de segunda ordem

$$\mathcal{A}_{n,1}(\psi_n^1)'' + \mathcal{B}_{n,1}(\psi_n^1)' + \mathcal{C}_{n,1}(\psi_n^1) = 0_{2\times 1}\,, \tag{III.10}$$

$$\tilde{\mathcal{A}}_{n,1}Q_n'' + \tilde{\mathcal{B}}_{n,1}Q_n' + \tilde{\mathcal{C}}_{n,1}Q_n = 0\,, \tag{III.11}$$

onde $\mathcal{A}_{n,1}, \mathcal{B}_{n,1}, \mathcal{C}_{n,1}$ são matrizes de elementos polinomiais dadas por

$$\mathcal{A}_{n,1} = (zA)^2\Theta_{n,1}\,I\,, \tag{III.12}$$

$$\mathcal{B}_{n,1} = -zA\Theta_{n,1}\left(M_{n,1} - (zA)'\,I\right) + zA\left(zAN'_{n,1} + N_{n,1}M_{n,2}\right)\,, \tag{III.13}$$

$$\mathcal{C}_{n,1} = -\Theta_{n,1}(zAM'_{n,1} + \Theta_{n,1}\Theta_{n,2}\,I) - \left(zAN'_{n,1} + N_{n,1}M_{n,2}\right)M_{n,1}\,, \tag{III.14}$$

$\tilde{\mathcal{A}}_{n,1} \in \mathbb{P}$, $\tilde{\mathcal{B}}_{n,1}, \tilde{\mathcal{C}}_{n,1}$ são funções analíticas dadas por

$$\tilde{\mathcal{A}}_{n,1} = (zA)^2\Theta_{n,1}\,, \tag{III.15}$$

$$\tilde{\mathcal{B}}_{n,1} = [\mathcal{B}_{n,1}]_{2,2} - 2zA\Theta_{n,1}BF\,, \tag{III.16}$$

$$\tilde{\mathcal{C}}_{n,1} = [\mathcal{C}_{n,1}]_{2,2} - \Theta_{n,1}F\left(zAB' - B(l_{n,1} + l_{n,2})\right) + zA\Theta'_{n,1}BF\,, \tag{III.17}$$

os polinómios $\Theta_{n,1}$ e as matrizes $N_{n,1}, N_{n,2}, M_{n,1}M_{n,2}$ são dados no teorema III.1;

c) $\{\psi_n^2\}$ e $\{Q_n^*\}$ verificam equações diferenciais de segunda ordem

$$\mathcal{A}_{n,2}(\psi_n^2)'' + \mathcal{B}_{n,2}(\psi_n^2)' + \mathcal{C}_{n,2}\psi_n^2 = 0_{2\times 1}\,, \tag{III.18}$$

$$\tilde{\mathcal{A}}_{n,2}(Q_n^*)'' + \tilde{\mathcal{B}}_{n,2}(Q_n^*)' + \tilde{\mathcal{C}}_{n,2}Q_n^* = 0\,, \tag{III.19}$$

onde $\mathcal{A}_{n,2}, \mathcal{B}_{n,2}, \mathcal{C}_{n,2}$ *são matrizes de elementos polinomiais dadas por*

$$\mathcal{A}_{n,2} = (zA)^2 \Theta_{n,2}\, I\,, \tag{III.20}$$

$$\mathcal{B}_{n,2} = -zA\Theta_{n,2}\left(M_{n,2} - (zA)'\, I\right) + zA\left(zAN'_{n,2} + N_{n,2}M_{n,1}\right)\,, \tag{III.21}$$

$$\mathcal{C}_{n,2} = -\Theta_{n,2}\left(zAM'_{n,2} + \Theta_{n,2}\Theta_{n,1}\, I\right) - \left(zAN'_{n,2} + N_{n,2}M_{n,1}\right)M_{n,2}\,, \tag{III.22}$$

$\tilde{\mathcal{A}}_{n,2} \in \mathbb{P}$, $\tilde{\mathcal{B}}_{n,2}, \tilde{\mathcal{C}}_{n,2}$ *são funções analíticas dadas por*

$$\tilde{\mathcal{A}}_{n,2} = (zA)^2\Theta_{n,2}\,, \tag{III.23}$$

$$\tilde{\mathcal{B}}_{n,2} = [\mathcal{B}_{n,2}]_{2,2} - 2zA\Theta_{n,2}BF\,, \tag{III.24}$$

$$\tilde{\mathcal{C}}_{n,2} = [\mathcal{C}_{n,2}]_{2,2} - \Theta_{n,2}F\left(zAB' - B(l_{n,1} + l_{n,2})\right) + zA\Theta'_{n,2}BF\,, \tag{III.25}$$

os polinómios $\Theta_{n,2}$ *e as matrizes* $N_{n,1}, N_{n,2}, M_{n,1}M_{n,2}$ *são dados no teorema III.1.*

Para demonstrar o teorema III.2 utilizaremos os lemas que se seguem.

LEMA III.1. *Seja* $u \in \mathcal{R}$ *e* F *a função de Carathéodory correspondente. Sejam* $\{\psi_n^1\}$, $\{\psi_n^2\}$ *e* $\{\mathcal{Q}_n\}$ *as sucessões associadas a* u *dadas por (I.22), (I.23) e (I.24), respectivamente. Se* F *verificar* $zAF' = BF^2 + CF + D$, *então:* $\{\psi_n^1\}$ *verifica (III.10) com coeficientes (III.12)-(III.14);* $\{\psi_n^2\}$ *verifica (III.18) com coeficientes (III.20)-(III.22);* $\{Q_n\}$ *verifica (III.11) com coeficientes (III.15)-(III.17);* $\{Q_n^*\}$ *verifica (III.19) com coeficientes (III.23)-(III.25).*

Demonstração: Se F verifica $zAF' = BF^2 + CF + D$, então, para todo o $n \in \mathbb{N}$, ψ_n^1 e ψ_n^2 verificam (III.4) e (III.6), respectivamente.

Passo 1. Derivando (III.4) obtemos

$$(zA)'(\psi_n^1)' + zA(\psi_n^1)'' = M'_{n,1}\psi_n^1 + M_{n,1}(\psi_n^1)' + N'_{n,1}\psi_n^2 + N_{n,1}(\psi_n^2)'\,,$$

i.e.,

$$zA(\psi_n^1)'' = \left(M_{n,1} - (zA)'\right)(\psi_n^1)' + M'_{n,1}\psi_n^1 + N'_{n,1}\psi_n^2 + N_{n,1}(\psi_n^2)'\,.$$

Passo 2: eliminação de $(\psi_n^2)'$. Para eliminar $(\psi_n^2)'$ multiplicamos a equação anterior pelo polinómio zA, o qual comuta com os coeficientes matriciais, e utilizamos a relação de estrutura (III.6), obtendo

$$\begin{aligned}(zA)^2(\psi_n^1)'' = zA\left(M_{n,1} - (zA)'\right)(\psi_n^1)' + \left(zAM'_{n,1} + N_{n,1}N_{n,2}\right)\psi_n^1 \\ + \left(zAN'_{n,1} + N_{n,1}M_{n,2}\right)\psi_n^2\,.\end{aligned}$$

Passo 3: eliminação de (ψ_n^2). Para eliminarmos ψ_n^2 multiplicamos a equação anterior por $\Theta_{n,1}$,

$$(zA)^2\Theta_{n,1}(\psi_n^1)'' = zA\Theta_{n,1}\left(M_{n,1} - (zA)'\right)(\psi_n^1)' \\ + \Theta_{n,1}\left(zAM'_{n,1} + N_{n,1}N_{n,2}\right)\psi_n^1 - \left(zAN'_{n,1} + N_{n,1}M_{n,2}\right)(-\Theta_{n,1})\psi_n^2 .$$

Se utilizarmos (III.4),

$$-\Theta_{n,1}\psi_n^2 = zA(\psi_n^1)' - M_{n,1}\psi_n^1 ,$$

obtemos que $\{\psi_n^1\}$ verifica $\mathcal{A}_{n,1}(\psi_n^1)'' + \mathcal{A}_{n,2}(\psi_n^1)' + \mathcal{C}_{n,1}\psi_n^1 = 0$ com coeficientes $\mathcal{A}_{n,i}$ dados por (III.12)-(III.14), para $i = 1, 2, 3$, respectivamente.

De modo análogo obtemos que: $\{\psi_n^2\}$ verifica a equação (III.18) com coeficientes (III.20)-(III.22); $\{Q_n\}$ verifica a equação (III.11) com coeficientes (III.15)-(III.17); $\{Q_n^*\}$ verifica a equação (III.19) com coeficientes (III.23)-(III.25). □

OBSERVAÇÃO . As equações (III.11) e (III.19) podem escrever-se na forma

$$\tilde{\mathcal{A}}_n\mathcal{Q}_n'' + \tilde{\mathcal{B}}_n\mathcal{Q}_n' + \tilde{\mathcal{C}}_n\mathcal{Q}_n = 0_{2\times 1} \tag{III.26}$$

com

$$\tilde{\mathcal{A}}_n = (zA)^2\begin{bmatrix}\Theta_{n,1} & 0\\ 0 & \Theta_{n,2}\end{bmatrix}, \tag{III.27}$$

$$\tilde{\mathcal{B}}_n = \begin{bmatrix}[\mathcal{B}_{n,1}]_{2,2} - 2zA\Theta_{n,1}BF & 0\\ 0 & [\mathcal{B}_{n,2}]_{2,2} - 2zA\Theta_{n,2}BF\end{bmatrix}, \tag{III.28}$$

$$\tilde{\mathcal{C}}_n = \begin{bmatrix}[\mathcal{C}_{n,1}]_{2,2} + \alpha_{n,1} & 0\\ 0 & [\mathcal{C}_{n,2}]_{2,2} + \alpha_{n,2}\end{bmatrix}, \tag{III.29}$$

onde

$$\alpha_{n,1} = -\Theta_{n,1}F\left(zAB' + BC - B(l_{n,1} + l_{n,2} + C)\right) + zA\Theta'_{n,1}BF ,$$
$$\alpha_{n,2} = -\Theta_{n,2}F\left(zAB' + BC - B(l_{n,1} + l_{n,2} + C)\right) + zA\Theta'_{n,2}BF .$$

Como consequência do lema anterior obtemos equações diferenciais de segunda ordem de coeficientes polinomiais para as sucessões de polinómios ortogonais Laguerre-Hahn afim e para a sucessão dos polinómios reversos. Trata-se de uma extensão a famílias Laguerre-Hahn afim de um resultado de C. Tasis para as famílias semi-clássicas sobre $\mathbb{T}$ (ver [**61**]).

COROLÁRIO III.2. *Seja $\{\phi_n\}$ uma SPOM sobre a circunferência, ortogonais relativamente a uma função de Carathéodory, F. Se F verificar $zAF' = CF + D$, com $A, C, D \in \mathbb{P}$, então $\{\phi_n\}$ e $\{\phi_n^*\}$ verificam uma equação diferencial de segunda ordem de coeficientes polinomiais, respectivamente,*

$$(zA)^2 \Theta_{n,1} \phi_n^{''} + B_{n,1}\phi_n' + C_{n,1}\phi_n = 0\,,$$

$$(zA)^2 \Theta_{n,2} (\phi_n^*)^{''} + B_{n,2}(\phi_n^*)' + C_{n,2}(\phi_n^*) = 0\,,$$

com coeficientes dados por $B_{n,1} = [\mathcal{B}_{n,1}]_{1,1}, C_{n,1} = [\mathcal{C}_{n,1}]_{1,1}, B_{n,2} = [\mathcal{B}_{n,2}]_{1,1}$, $C_{n,2} = [\mathcal{C}_{n,2}]_{1,1}$, para todo o $n \in \mathbb{N}$.

Demonstração: Se fizermos $B = 0$ em (III.10) e em (III.18) obtemos

$$[\mathcal{B}_{n,1}]_{1,2} = [\mathcal{C}_{n,1}]_{1,2} = [\mathcal{B}_{n,2}]_{1,2} = [\mathcal{C}_{n,2}]_{1,2} = 0,$$

donde se seguem as equações requeridas. □

LEMA III.2. *Sejam $u \in \mathcal{R}$ e $\{\psi_n^1\}$, $\{\psi_n^2\}$ as sucessões de vectores associados a u definidos por (I.22) e (I.23), e $\{Q_n\}$ a sucessão de funções de segunda espécie. $\{\psi_n^1\}$ e $\{Q_n\}$ verificam*

$$\begin{cases} \mathcal{A}_{n,1}(\psi_n^1)^{''} + \mathcal{B}_{n,1}(\psi_n^1)' + \mathcal{C}_{n,1}\psi_n^1 = 0_{2\times 1} \\ \tilde{\mathcal{A}}_{n,1}Q_n^{''} + \tilde{\mathcal{B}}_{n,1}Q_n' + \tilde{\mathcal{C}}_{n,1}Q_n = 0\,, \end{cases}$$

com $\mathcal{A}_{n,1}, \mathcal{B}_{n,1}, \mathcal{C}_{n,1}$ matrizes de ordem dois de elementos polinomiais e $\tilde{\mathcal{A}}_{n,1}$, $\tilde{\mathcal{B}}_{n,1}, \tilde{\mathcal{C}}_{n,1}$ funções analíticas, se, e somente se, $\{\psi_n^2\}$ e $\{Q_n^*\}$ verificam

$$\begin{cases} \mathcal{A}_{n,2}(\psi_n^2)^{''} + \mathcal{B}_{n,2}(\psi_n^2)' + \mathcal{C}_{n,2}\psi_n^2 = 0_{2\times 1} \\ \tilde{\mathcal{A}}_{n,2}(Q_n^*)^{''} + \tilde{\mathcal{B}}_{n,2}(Q_n^*)' + \tilde{\mathcal{C}}_{n,2}Q_n^* = 0\,, \end{cases} \tag{III.30}$$

com

$$\mathcal{A}_{n,2} = z^4 \mathcal{A}_{n,1}^{*_p}\, J\,, \tag{III.31}$$

$$\mathcal{B}_{n,2} = -2(n-1)z^3 \mathcal{A}_{n,1}^{*_p}\, J - z^2 \mathcal{B}_{n,1}^{*_p}\, J\,, \tag{III.32}$$

$$\mathcal{C}_{n,2} = n(n-1)z^2 \mathcal{A}_{n,1}^{*_p}\, J + nz\mathcal{B}_{n,1}^{*_p}\, J + \mathcal{C}_{n,1}^{*_p}\, J\,, \tag{III.33}$$

$$\tilde{\mathcal{A}}_{n,2} = z^4 \tilde{\mathcal{A}}_{n,1}^{*_p}\,, \tag{III.34}$$

$$\tilde{\mathcal{B}}_{n,2} = -2(n-1)z^3 \tilde{\mathcal{A}}_{n,1}^{*_p} - z^2 \tilde{\mathcal{B}}_{n,1}^{*_p}\,, \tag{III.35}$$

$$\tilde{\mathcal{C}}_{n,2} = n(n-1)z^2 \tilde{\mathcal{A}}_{n,1}^{*_p} + nz\tilde{\mathcal{B}}_{n,1}^{*_p} + \tilde{\mathcal{C}}_{n,1}^{*_p}\,. \tag{III.36}$$

Além disso, se $\mathcal{A}_{n,1}$ for uma matriz diagonal, então $\mathcal{A}_{n,2}, \mathcal{B}_{n,2}, \mathcal{C}_{n,2}$ são dados por

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_{n,2} &= z^4 \mathcal{A}_{n,1}^{*_p} \,, \\
\mathcal{B}_{n,2} &= -2(n-1)z^3 \mathcal{A}_{n,1}^{*_p} - z^2\, J\mathcal{B}_{n,1}^{*_p}\, J \,, \\
\mathcal{C}_{n,2} &= n(n-1)z^2 \mathcal{A}_{n,1}^{*_p} + nz\, J\mathcal{B}_{n,1}^{*_p}\, J + J\mathcal{C}_{n,1}^{*_p}\, J \,,
\end{aligned}$$

com $J = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.

Demonstração: Se aplicarmos o operador $*_{n+p}$, com

$$p = \max\{\mathrm{gr}([\mathcal{A}_{n,1}]_{i,j}), \mathrm{gr}([\mathcal{B}_{n,1}]_{i,j}), \mathrm{gr}([\mathcal{C}_{n,1}]_{i,j}),\ i,j = 1,2\}$$

a

$$\mathcal{A}_{n,1}(\psi_n^1)'' + \mathcal{B}_{n,1}(\psi_n^1)' + \mathcal{C}_{n,1}\psi_n^1 = 0_{2\times 1}$$

obtemos

$$\mathcal{A}_{n,1}^{*_{p+2}} \left[(\psi_n^1)''\right]^{*_{n-2}} + \mathcal{B}_{n,1}^{*_{p+1}} \left[(\psi_n^1)'\right]^{*_{n-1}} + \mathcal{C}_{n,1}^{*_p}(\psi_n^1)^{*_n} = 0_{2\times 1} \,.$$

Se utilizarmos (I.28) e (I.29) na equação anterior obtemos

$$\begin{aligned}
z^2 \mathcal{A}_{n,1}^{*_{p+2}}\, J(\psi_n^2)'' + \left\{-2(n-1)z\mathcal{A}_{n,1}^{*_{p+2}}\, J - z\mathcal{B}_{n,1}^{*_{p+1}}\, J\right\}(\psi_n^2)' \\
+ \left\{n(n-1)\mathcal{A}_{n,1}^{*_{p+2}}\, J + n\mathcal{B}_{n,1}^{*_{p+1}}\, J + \mathcal{C}_{n,1}^{*_p}\, J\right\}\psi_n^2 = 0_{2\times 1} \,.
\end{aligned}$$

Uma vez que $z^2\mathcal{A}_{n,1}^{*_{p+2}} = z^4\mathcal{A}_{n,1}^{*_p}$, $z\mathcal{A}_{n,1}^{*_{p+2}} = z^3\mathcal{A}_{n,1}^{*_p}$, $z\mathcal{B}_{n,1}^{*_{p+1}} = z^2\mathcal{B}_{n,1}^{*_p}$, obtemos

$$\mathcal{A}_{n,2}(\psi_n^2)'' + \mathcal{B}_{n,2}(\psi_n^2)' + \mathcal{C}_{n,2}\psi_n^2 = 0_{2\times 1}$$

com $\mathcal{A}_{n,2}, \mathcal{B}_{n,2}, \mathcal{C}_{n,2}$ dados, repectivamente, por (III.31)-(III.33).

Além disso, se $\mathcal{A}_{n,1}$ for uma matriz diagonal, multiplicamos equação anterior por J e obtemos os coeficientes $\mathcal{A}_{n,2}, \mathcal{B}_{n,2}, \mathcal{C}_{n,2}$ conforme indicado

A equivalência entre $\tilde{\mathcal{A}}_{n,1}Q_n'' + \tilde{\mathcal{B}}_{n,1}Q_n' + \tilde{\mathcal{C}}_{n,1}Q_n = 0$ e

$$\begin{aligned}
z^4\tilde{\mathcal{A}}_{n,1}^{*_p}(Q_n^*)'' + \left\{-2(n-1)z^3\tilde{\mathcal{A}}_{n,1}^{*_p} - z^2\tilde{\mathcal{B}}_{n,1}^{*_p}\right\}(Q_n^*)' \\
+ \left\{n(n-1)z^2\tilde{\mathcal{A}}_{n,1}^{*_p} + nz\tilde{\mathcal{B}}_{n,1}^{*_p} + \tilde{\mathcal{C}}_{n,1}^{*_p}\right\}Q_n^* = 0
\end{aligned}$$

estabelece-se de modo análogo. □

LEMA III.3. *Sejam $u \in \mathcal{R}$, $\{\psi_n^1\}$, $\{\psi_n^2\}$ as sucessões de vectores associados a u definidos por (I.22) e (I.23). Se $\{\psi_n^1\}$ verificar a equação diferencial de segunda ordem (III.10) com coeficientes (III.12)-(III.14) e $\{\psi_n^2\}$ verificar a equação diferencial de segunda ordem (III.18) com coeficientes (III.20)-(III.22), então verificam-se as equações, $\forall n \in \mathbb{N}$,*

$$zA_{n,1}(z)(\psi_n^1)'(z) = \mathcal{M}_{n,1}\psi_n^1(z) + \mathcal{N}_{n,1}\psi_n^2(z)\,, \tag{III.37}$$

$$zA_{n,2}(z)(\psi_n^2)'(z) = \mathcal{N}_{n,2}\psi_n^1(z) + \mathcal{M}_{n,2}\psi_n^2(z)\,, \tag{III.38}$$

com $A_{n,1}, A_{n,2} \in \mathbb{P}$, $\mathcal{M}_{n,1}, \mathcal{N}_{n,1}, \mathcal{M}_{n,2}, \mathcal{N}_{n,2}$ matrizes de ordem 2 de elementos polinomiais, e $\mathcal{N}_{n,1}, \mathcal{N}_{n,2}$ matrizes escalares.

Demonstração: Passo 1. Consideremos as equações (III.10) e (III.18) escritas na forma

$$\mathcal{A}_n\varphi_n'' + \mathcal{B}_n\varphi_n' + \mathcal{C}_n\varphi_n = 0_{4\times 1}\,, \tag{III.39}$$

onde, para $n \in \mathbb{N}$, $\varphi_n = \begin{bmatrix} \psi_n^1 \\ \psi_n^2 \end{bmatrix}$ e $\mathcal{A}_n, \mathcal{B}_n, \mathcal{C}_n$ são as matrizes em blocos dadas por

$$\mathcal{A}_n = (zA)^2 \begin{bmatrix} \Theta_{n,1}I & 0_{2\times 2} \\ 0_{2\times 2} & \Theta_{n,2}I \end{bmatrix}\,,\ \mathcal{B}_n = \begin{bmatrix} \mathcal{B}_{n,1} & 0_{2\times 2} \\ 0_{2\times 2} & \mathcal{B}_{n,2} \end{bmatrix}\,,\ \mathcal{C}_n = \begin{bmatrix} \mathcal{C}_{n,1} & 0_{2\times 2} \\ 0_{2\times 2} & \mathcal{C}_{n,2} \end{bmatrix}\,.$$

Fazendo $n+1$ em (III.39) obtemos, para $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathcal{A}_{n+1}\varphi_{n+1}'' + \mathcal{B}_{n+1}\varphi_{n+1}' + \mathcal{C}_{n+1}\varphi_{n+1} = 0_{4\times 1}\,.$$

Se utilizarmos as relações de recorrência (I.26) na equação anterior obtemos, para $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{n+1}\mathcal{K}_{n+1}^1\varphi_n'' + \left\{2\mathcal{A}_{n+1}\left(\mathcal{K}_{n+1}^1\right)' + \mathcal{B}_{n+1}\mathcal{K}_{n+1}^1\right\}\varphi_n' \\ + \left\{\mathcal{B}_{n+1}(\mathcal{K}_{n+1}^1)' + \mathcal{C}_{n+1}\mathcal{K}_{n+1}^1\right\}\varphi_n = 0_{4\times 1}\,, \end{aligned} \tag{III.40}$$

onde $\mathcal{K}_{n+1}^1 = \begin{bmatrix} zI & a_{n+1}I \\ \overline{a}_{n+1}zI & I \end{bmatrix}$.

Passo 2. (Eliminação de φ_n''.) Se multiplicarmos (III.40) à esquerda pela matriz de blocos $\Theta_{n,1}\Theta_{n,2}\begin{bmatrix}\Theta_{n+1,2}I & 0_{2\times 2}\\ 0_{2\times 2} & \Theta_{n+1,1}I\end{bmatrix}$ obtemos, para $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\Theta_{n+1,1}\Theta_{n+1,2}\mathcal{K}^1_{n+1}&\begin{bmatrix}\Theta_{n,2}\, I & 0_{2\times 2}\\ 0_{2\times 2} & \Theta_{n,1}\, I\end{bmatrix}\mathcal{A}_n\varphi''_n\\ &+\Theta_{n,1}\Theta_{n,2}\begin{bmatrix}\Theta_{n+1,2}\, I & 0_{2\times 2}\\ 0_{2\times 2} & \Theta_{n+1,1}\, I\end{bmatrix}\left\{2\mathcal{A}_{n+1}\left(\mathcal{K}^1_{n+1}\right)'+\mathcal{B}_{n+1}\mathcal{K}^1_{n+1}\right\}\varphi'_n\\ &+\Theta_{n,1}\Theta_{n,2}\begin{bmatrix}\Theta_{n+1,2}\, I & 0_{2\times 2}\\ 0_{2\times 2} & \Theta_{n+1,1}\, I\end{bmatrix}\left\{\mathcal{B}_{n+1}\left(\mathcal{K}^1_{n+1}\right)'+\mathcal{C}_{n+1}\mathcal{K}^1_{n+1}\right\}\varphi_n = 0_{4\times 1}\,.\end{aligned}$$

Se utilizarmos (III.39) para n na equação anterior obtemos

$$\hat{\mathcal{A}}_n\varphi'_n = \hat{\mathcal{M}}_n\varphi_n\,, n\in\mathbb{N}\,, \tag{III.41}$$

com

$$\begin{aligned}\hat{\mathcal{A}}_n = -\Theta_{n+1,1}\Theta_{n+1,2}\mathcal{K}^1_{n+1}&\begin{bmatrix}\Theta_{n,2}I & 0_{2\times 2}\\ 0_{2\times 2} & \Theta_{n,1}I\end{bmatrix}\mathcal{B}_n\\ &+\Theta_{n,1}\Theta_{n,2}\begin{bmatrix}\Theta_{n+1,2}I & 0_{2\times 2}\\ 0_{2\times 2} & \Theta_{n+1,1}I\end{bmatrix}\left\{2\mathcal{A}_{n+1}\left(\mathcal{K}^1_{n+1}\right)'+\mathcal{B}_{n+1}\mathcal{K}^1_{n+1}\right\}\,,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\hat{\mathcal{M}}_n = \Theta_{n+1,1}\Theta_{n+1,2}\mathcal{K}^1_{n+1}&\begin{bmatrix}\Theta_{n,2}I & 0\\ 0 & \Theta_{n,1}I\end{bmatrix}\mathcal{C}_n\\ &-\Theta_{n,1}\Theta_{n,2}\begin{bmatrix}\Theta_{n+1,2}I & 0\\ 0 & \Theta_{n+1,1}I\end{bmatrix}\left\{\mathcal{B}_{n+1}\left(\mathcal{K}^1_{n+1}\right)'+\mathcal{C}_{n+1}\mathcal{K}^1_{n+1}\right\}\,.\end{aligned}$$

Passo 3. (Obtenção das relações de estrutura.) Se multiplicarmos (III.41) pela matriz adjunta de $\hat{\mathcal{A}}_n$ obtemos

$$\det(\hat{\mathcal{A}}_n)\varphi'_n = \mathcal{M}_n\varphi_n\,, n\in\mathbb{N}\,. \tag{III.42}$$

Além disso, para todo o $n \in \mathbb{N}$, temos que $\det(\hat{\mathcal{A}}_n)$ é um polinómio (com um zero em $z = 0$) e, se escrevermos $\mathcal{M}_n = \begin{bmatrix}\mathcal{M}_{n,1} & \mathcal{N}_{n,1}\\ \mathcal{N}_{n,2} & \mathcal{M}_{n,2}\end{bmatrix}$, verifica-se que $\mathcal{N}_{n,1}$ e $\mathcal{N}_{n,2}$ são matrizes escalares. Assim obtemos, na forma matricial (III.42), as equações (III.37) e (III.38). □

LEMA III.4. *Sejam $u \in \mathcal{R}$ e $\{\mathcal{Q}_n\}$ a sucessão de vectores associada a u definida por (I.24). Se $\{\mathcal{Q}_n\}$ verificar a equação diferencial de segunda ordem (III.26),*

$$\tilde{\mathcal{A}}_n \mathcal{Q}_n'' + \tilde{\mathcal{B}}_n \mathcal{Q}_n' + \tilde{\mathcal{C}}_n \mathcal{Q}_n = 0_{2\times 1}\,,$$

com $\tilde{\mathcal{A}}_n, \tilde{\mathcal{B}}_n, \tilde{\mathcal{C}}_n$ dados, respectivamente, por (III.27), (III.28) e (III.29), então, $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$z A_n \mathcal{Q}_n' = \mathcal{M}_n \mathcal{Q}_n\,, \tag{III.43}$$

onde $A_n \in \mathbb{P}$ e $\mathcal{M}_n$ é uma matriz de ordem 2 de elementos analíticos.

Demonstração: Passo 1. Fazendo $n+1$ em (III.26) obtemos, para $n \in \mathbb{N}$,

$$\tilde{\mathcal{A}}_{n+1} \mathcal{Q}_{n+1}'' + \tilde{\mathcal{B}}_{n+1} \mathcal{Q}_{n+1}' + \tilde{\mathcal{C}}_{n+1} \mathcal{Q}_{n+1} = 0_{2\times 1}\,.$$

Se utilizarmos as relações de recorrência (I.27) obtemos, para $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\tilde{\mathcal{A}}_{n+1}\mathcal{K}_{n+1}\mathcal{Q}_n'' + \left\{2\tilde{\mathcal{A}}_{n+1}\mathcal{K}_{n+1}' + \tilde{\mathcal{B}}_{n+1}\mathcal{K}_{n+1}\right\}\mathcal{Q}_n'& \\ + \left\{\tilde{\mathcal{B}}_{n+1}\mathcal{K}_{n+1}' + \tilde{\mathcal{C}}_{n+1}\mathcal{K}_{n+1}\right\}\mathcal{Q}_n &= 0_{2\times 1}\,,\end{aligned}$$

onde $\mathcal{K}_{n+1} = \begin{bmatrix} z & a_{n+1} \\ \overline{a}_{n+1} z & 1 \end{bmatrix}$.

Passo 2. (Eliminação de $\mathcal{Q}_n''$.) Se multiplicarmos a equação anterior à esquerda pela matriz $\Theta_{n,1}\Theta_{n,2}\begin{bmatrix}\Theta_{n+1,2} & 0 \\ 0 & \Theta_{n+1,1}\end{bmatrix}$ obtemos, para $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}&\Theta_{n+1,1}\Theta_{n+1,2}\mathcal{K}_{n+1}\begin{bmatrix}\Theta_{n,2} & 0 \\ 0 & \Theta_{n,1}\end{bmatrix}\tilde{\mathcal{A}}_n\mathcal{Q}_n'' \\ &\quad + \Theta_{n,1}\Theta_{n,2}\begin{bmatrix}\Theta_{n+1,2} & 0 \\ 0 & \Theta_{n+1,1}\end{bmatrix}\left\{2\tilde{\mathcal{A}}_{n+1}\mathcal{K}_{n+1}' + \tilde{\mathcal{B}}_{n+1}\mathcal{K}_{n+1}\right\}\mathcal{Q}_n' \\ &\quad + \Theta_{n,1}\Theta_{n,2}\begin{bmatrix}\Theta_{n+1,2} & 0 \\ 0 & \Theta_{n+1,1}\end{bmatrix}\left\{\tilde{\mathcal{B}}_{n+1}\mathcal{K}_{n+1}' + \tilde{\mathcal{C}}_{n+1}\mathcal{K}_{n+1}\right\}\mathcal{Q}_n = 0_{2\times 1}\,.\end{aligned}$$

Se utilizarmos (III.26) para n na equação anterior obtemos

$$\hat{\mathcal{A}}_n \mathcal{Q}_n' = \hat{\mathcal{M}}_n \mathcal{Q}_n\,, \forall n \in \mathbb{N}\,, \tag{III.44}$$

com

$$\hat{\mathcal{A}}_n = -\Theta_{n+1,1}\Theta_{n+1,2}\mathcal{K}_{n+1}\begin{bmatrix}\Theta_{n,2} & 0\\ 0 & \Theta_{n,1}\end{bmatrix}\tilde{\mathcal{B}}_n$$
$$+\,\Theta_{n,1}\Theta_{n,2}\begin{bmatrix}\Theta_{n+1,2} & 0\\ 0 & \Theta_{n+1,1}\end{bmatrix}\left\{2\tilde{\mathcal{A}}_{n+1}\mathcal{K}'_{n+1}+\tilde{\mathcal{B}}_{n+1}\mathcal{K}_{n+1}\right\},$$

$$\hat{\mathcal{M}}_n = \Theta_{n+1,1}\Theta_{n+1,2}\mathcal{K}_{n+1}\begin{bmatrix}\Theta_{n,2} & 0\\ 0 & \Theta_{n,1}\end{bmatrix}\tilde{\mathcal{C}}_n$$
$$-\,\Theta_{n,1}\Theta_{n,2}\begin{bmatrix}\Theta_{n+1,2} & 0\\ 0 & \Theta_{n+1,1}\end{bmatrix}\left\{\tilde{\mathcal{B}}_{n+1}\mathcal{K}'_{n+1}+\tilde{\mathcal{C}}_{n+1}\mathcal{K}_{n+1}\right\}.$$

Além disso, verifica-se que $\hat{\mathcal{A}}_n$ é uma matriz de entradas polinomiais,

$$\hat{\mathcal{A}}_n = -\Theta_{n+1,1}\Theta_{n+1,2}\mathcal{K}_{n+1}\begin{bmatrix}\Theta_{n,2} & 0\\ 0 & \Theta_{n,1}\end{bmatrix}\mathcal{B}_n$$
$$+\,\Theta_{n,1}\Theta_{n,2}\begin{bmatrix}\Theta_{n+1,2} & 0\\ 0 & \Theta_{n+1,1}\end{bmatrix}\left\{2\tilde{\mathcal{A}}_{n+1}\mathcal{K}'_{n+1}+\mathcal{B}_{n+1}\mathcal{K}_{n+1}\right\},$$

sendo $\mathcal{B}_n$ a matriz (de entradas polinomiais) dada por (cf. (III.28))

$$\mathcal{B}_n = \begin{bmatrix}[\mathcal{B}_{n,1}]_{2,2} & 0\\ 0 & [\mathcal{B}_{n,2}]_{2,2}\end{bmatrix},\, n\in\mathbb{N}\,.$$

Passo 3. (Obtenção das relações de estrutura.) Se multiplicarmos (III.44) pela matriz adjunta de $\hat{\mathcal{A}}_n$, $\operatorname{adj}(\hat{\mathcal{A}}_n)$, e tivermos em atenção que $\det(\hat{\mathcal{A}}_n)$ é um polinómio que se anula em $z=0$, para todo o $n\in\mathbb{N}$, então obtemos as relações de estrutura (III.43),

$$zA_n\mathcal{Q}'_n = \mathcal{M}_n\mathcal{Q}_n\,,\, n\in\mathbb{N}\,,$$

com $zA_n = \det(\hat{\mathcal{A}}_n)$ e $\mathcal{M}_n = \operatorname{adj}(\hat{\mathcal{A}}_n)\hat{\mathcal{M}}_n$. □

De seguida estudamos os coeficientes das relações de estrutura obtidas anteriormente, (III.37), (III.38) e (III.43).

LEMA III.5. *Sejam $u\in\mathcal{R}$, $\{\psi_n^1\}$, $\{\psi_n^2\}$ as sucessões de vectores associados a u definidos por (I.22) e (I.23), e $\varphi_n = \begin{bmatrix}\psi_n^1\\ \psi_n^2\end{bmatrix}$, $\forall n\in\mathbb{N}$. Se $\{\varphi_n\}$ verificar*

$$zA_n\varphi'_n = \mathcal{M}_n^1\varphi_n \tag{III.45}$$

onde $A_n \in \mathbb{P}$ *e* $\mathcal{M}_n^1 = \begin{bmatrix} \mathcal{M}_{n,1} & \mathcal{N}_{n,1} \\ \mathcal{N}_{n,2} & \mathcal{M}_{n,2} \end{bmatrix}$ *com* $\mathcal{M}_{n,1}, \mathcal{N}_{n,1}, \mathcal{N}_{n,2}, \mathcal{M}_{n,2}$ *matrizes de ordem dois, então,* $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$A_n = A_1 \,, \tag{III.46}$$

$$zA = z\mathcal{M}_{n+1,1} - z\mathcal{M}_{n,1} - a_{n+1}\mathcal{N}_{n,2} + \overline{a}_{n+1} z\mathcal{N}_{n+1,1} \,, \tag{III.47}$$

$$\overline{a}_{n+1} zA = z\mathcal{N}_{n+1,2} + \overline{a}_{n+1} z\mathcal{M}_{n+1,2} - \overline{a}_{n+1} z\mathcal{M}_{n+1,1} - \mathcal{N}_{n,2} \,, \tag{III.48}$$

$$a_{n+1}\mathcal{M}_{n+1,1} + \mathcal{N}_{n+1,1} - z\mathcal{N}_{n,1} - a_{n+1}\mathcal{M}_{n,2} = 0_{2\times 2} \,, \tag{III.49}$$

$$a_{n+1}\mathcal{N}_{n+1,2} + \mathcal{M}_{n+1,2} - \overline{a}_{n+1} z\mathcal{N}_{n,1} - \mathcal{M}_{n,2} = 0_{2\times 2} \,. \tag{III.50}$$

Demonstração: Fazendo $n+1$ em (III.45) obtemos, para $n \in \mathbb{N}$,

$$zA_{n+1}\varphi'_{n+1} = \mathcal{M}^1_{n+1}\varphi_{n+1} \,.$$

Se utilizarmos as relações de recorrência na forma matricial (I.26) obtemos

$$zA_{n+1}\left\{ \left(\mathcal{K}^1_{n+1}\right)' \varphi_n + \mathcal{K}^1_{n+1}\varphi'_n \right\} = \mathcal{M}^1_{n+1}\mathcal{K}^1_{n+1}\varphi_n \,,$$

com $\mathcal{K}^1_{n+1} = \begin{bmatrix} zI & a_{n+1}I \\ \overline{a}_{n+1} zI & I \end{bmatrix}$. Logo, temos

$$zA_{n+1}\mathcal{K}^1_{n+1}\varphi'_n = \left(\mathcal{M}^1_{n+1}\mathcal{K}^1_{n+1} - zA_{n+1}\left(\mathcal{K}^1_{n+1}\right)' \right) \varphi_n \,, \forall n \in \mathbb{N} \,.$$

Donde,

$$zA_{n+1}\varphi'_n = \left(\mathcal{K}^1_{n+1}\right)^{-1} \left(\mathcal{M}^1_{n+1}\mathcal{K}^1_{n+1} - zA_{n+1}\mathcal{K}^1_{n+1} \right) \varphi_n \,, \forall n \in \mathbb{N} \,. \tag{III.51}$$

Da comparação entre (III.51) e (III.45) obtemos, $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{cases} A_{n+1} = A_n \\ \left(\mathcal{K}^1_{n+1}\right)^{-1} \left(\mathcal{M}_{n+1}\mathcal{K}^1_{n+1} - zA_{n+1}\mathcal{K}^1_{n+1} \right) = \mathcal{M}^1_n \,. \end{cases}$$

Logo, obtemos as igualdades, $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$A_n = A_1 \,,$$

$$\mathcal{M}_{n+1}\mathcal{K}^1_{n+1} - zA_{n+1}\mathcal{K}^1_{n+1} = \mathcal{K}^1_{n+1}\mathcal{M}^1_n \,,$$

donde se seguem as equações requeridas. □

LEMA III.6. *Seja $u \in \mathcal{R}$ e $\{\mathcal{Q}_n\}$ a sucessão de vectores associados a u definidos por (I.24). Se*

$$zA_n\mathcal{Q}_n' = \mathcal{M}_n\mathcal{Q}_n, \ \forall n \in \mathbb{N} \tag{III.52}$$

onde $A_n \in \mathbb{P}$ e $\mathcal{M}_n$ é uma matriz de ordem dois de elementos analíticos, então A_n não depende de n.

Demonstração: Análoga à demonstração do lema anterior. □

LEMA III.7. *Para todo o $n \in \mathbb{N}$, os coeficientes das relações de estrutura (III.37) e (III.38) são dados por*

$$A_{n,1} = A_{n,2} = A_1\,, \tag{III.53}$$

$$\mathcal{M}_{n,1} = \begin{bmatrix} l_{n,1} - \gamma/2 & -\beta \\ \delta & l_{n,1} + \gamma/2 \end{bmatrix}, \tag{III.54}$$

$$\mathcal{M}_{n,2} = \begin{bmatrix} l_{n,2} - \gamma/2 & -\beta \\ \delta & l_{n,2} + \gamma/2 \end{bmatrix}, \tag{III.55}$$

$$\mathcal{N}_{n,1} = h_{n,1}\,I\,, \tag{III.56}$$

$$\mathcal{N}_{n,2} = h_{n,2}\,I\,, \tag{III.57}$$

onde $A_1, \beta, \gamma, \delta, l_{n,1}, l_{n,2}, h_{n,1}, h_{n,2}$ são polinómios ($A_1, \beta, \gamma, \delta$, independentes de n). Além disso, relativamente às relações de estrutura (III.43), tem-se que, $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$A_n = A_1, \ \ [\hat{\mathcal{M}}_n]_{1,1} = [\mathcal{M}_{n,1}]_{2,2} - [\mathcal{M}_{n,1}]_{1,2}F, \ \ [\hat{\mathcal{M}}_n]_{1,2} = [\mathcal{N}_{n,1}]_{2,2}$$
$$[\hat{\mathcal{M}}_n]_{2,1} = [\mathcal{N}_{n,2}]_{2,2}, \ \ [\hat{\mathcal{M}}_n]_{2,2} = [\mathcal{M}_{n,2}]_{2,2} - [\mathcal{M}_{n,2}]_{1,2}F\,. \tag{III.58}$$

Demonstração: Pelo lema III.5 obtemos (III.53). Pelo lema III.3 obtemos que as matrizes $\mathcal{N}_{n,1}$ e $\mathcal{N}_{n,2}$ são escalares, donde (III.56) e (III.57), para alguns polinómios $h_{n,1}, h_{n,2}$.

Deduzam-se agora (III.54) e (III.55).

Tendo em atenção que $[\mathcal{N}_{n,1}]_{1,2} = [\mathcal{N}_{n,1}]_{2,1} = 0\,, \forall n \in \mathbb{N}$, de (III.49) e de (III.50) obtemos, $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$[\mathcal{M}_{n+1,1}]_{1,2} = [\mathcal{M}_{n,2}]_{1,2}\ ,\ [\mathcal{M}_{n+1,1}]_{2,1} = [\mathcal{M}_{n,2}]_{2,1}\ , \tag{III.59}$$

$$[\mathcal{M}_{n+1,2}]_{1,2} = [\mathcal{M}_{n,2}]_{1,2}\ ,\ [\mathcal{M}_{n+1,2}]_{2,1} = [\mathcal{M}_{n,2}]_{2,1}\ . \tag{III.60}$$

De (III.60) conclui-se que os elementos $[\mathcal{M}_{n,2}]_{1,2}$ e $[\mathcal{M}_{n,2}]_{2,1}$ não dependem de n, e escrevemos

$$[\mathcal{M}_{n,2}]_{1,2} = -\beta\,, \quad [\mathcal{M}_{n,2}]_{2,1} = \delta\,, \ \forall n \in \mathbb{N}\,. \tag{III.61}$$

Consequentemente, de (III.59) segue-se que

$$[\mathcal{M}_{n,1}]_{1,2} = -\beta, \quad [\mathcal{M}_{n+1,1}]_{2,1} = \delta\,, \ \forall n \in \mathbb{N}\,. \tag{III.62}$$

De (III.50) obtemos, $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$[\mathcal{M}_{n+1,2}]_{1,1} - [\mathcal{M}_{n,2}]_{1,1} = \overline{a}_{n+1} z [\mathcal{N}_{n,1}]_{1,1} - a_{n+1}[\mathcal{N}_{n+1,2}]_{1,1}\,,$$
$$[\mathcal{M}_{n+1,2}]_{2,2} - [\mathcal{M}_{n,2}]_{2,2} = \overline{a}_{n+1} z [\mathcal{N}_{n,1}]_{2,2} - a_{n+1}[\mathcal{N}_{n+1,2}]_{2,2}\,.$$

Tendo em atenção que $\mathcal{N}_{n,1}$ e $\mathcal{N}_{n,1}$ são matrizes escalares, segue-se que

$$[\mathcal{M}_{n+1,2}]_{2,2} - [\mathcal{M}_{n+1,2}]_{1,1} = [\mathcal{M}_{n,2}]_{2,2} - [\mathcal{M}_{n,2}]_{1,1}\,, \ \forall n \in \mathbb{N}\,.$$

Assim, $[\mathcal{M}_{n,2}]_{2,2} - [\mathcal{M}_{n,2}]_{1,1}$ não depende de n, e escrevemos

$$[\mathcal{M}_{n,2}]_{2,2} - [\mathcal{M}_{n,2}]_{1,1} = \gamma\,, \forall n \in \mathbb{N}\,. \tag{III.63}$$

Analogamente, de (III.49) obtemos

$$[\mathcal{M}_{n+1,1}]_{2,2} - [\mathcal{M}_{n+1,1}]_{1,1} = [\mathcal{M}_{n,2}]_{2,2} - [\mathcal{M}_{n,2}]_{1,1}, \ \forall n \in \mathbb{N}\,.$$

Consequentemente, de (III.63) segue-se que

$$[\mathcal{M}_{n,1}]_{2,2} - [\mathcal{M}_{n,1}]_{1,1} = \gamma\,, \forall n \in \mathbb{N}\,. \tag{III.64}$$

Tendo em atenção as relações (III.61)-(III.64), obtemos as representações (III.54) e (III.55).

Finalmente, para estabelecer (III.58) basta atender aos lemas III.1, III.2, III.4 (e às operações aí efectuadas com $\{\mathcal{Q}_n\}$). $\square$

LEMA III.8. *Sejam $u \in \mathcal{R}$, F a função de Carathéodory correspondente, $\{\psi_n^1\}$, $\{\psi_n^2\}$ as sucessões de vectores associados a u definidos por (I.22) e (I.23) e $\{Q_n\}$ a sucessão de funções de segunda espécie. Se $\{\psi_n^1\}$ verificar a equação diferencial de segunda ordem (III.10) com coeficientes dados por (III.12)-(III.14) e $\{Q_n\}$ verificar (III.11) com coeficientes dados por (III.15)-(III.17), então F verifica $zAF' = BF^2 + CF + D$.*

Demonstração: Pelo lema III.2, $\{\psi_n^2\}$ e $\{Q_n^*\}$ verificam

$$\mathcal{A}_{n,2}(\psi_n^2)'' + \mathcal{B}_{n,2}(\psi_n^2)' + \mathcal{C}_{n,2}\psi_n^2 = 0_{2\times 1}\,,$$

$$\tilde{\mathcal{A}}_n(Q_n^*)'' + \tilde{\mathcal{B}}_n(Q_n^*)' + \tilde{\mathcal{C}}_n Q_n^* = 0\,.$$

Dos lemas III.3 e III.4 obtemos as relações de estrutura (III.37), (III.38) e (III.43). Do lema III.7 temos as equações (III.53), (III.54) e (III.56).

Logo, conclui-se que F verifica a equação diferencial de Riccati de coeficientes polinomiais $zAF' = BF^2 + CF + D$. □

2.1. Demonstração do teorema III.2:

O lema III.1 estabelece $a) \Rightarrow b)$ e estabelece $a) \Rightarrow c)$. Pelo lema III.2 estebelece-se a equivalência entre $b)$ e $c)$. O lema III.8 estabelece $b) \Rightarrow a)$.

CAPÍTULO IV

Equações matriciais de Sylvester

O principal objectivo deste capítulo é a obtenção de uma representação para as sucessões de polinómios ortogonais Laguerre-Hahn sobre a circunferência unitária.

Consideraremos uma função de Carathéodory, F, verificando a equação diferencial $zAF' = BF^2 + CF + D$, com $A, B, C, D \in \mathbb{P}$, e as sucessões $\{Y_n\}, \{\mathcal{Q}_n\}$, dadas por $Y_n = \begin{bmatrix} \phi_n & -\Omega_n \\ \phi_n^* & \Omega_n^* \end{bmatrix}$, $\mathcal{Q}_n = \begin{bmatrix} -Q_n \\ Q_n^* \end{bmatrix}$, $n \geq 0$, com $\{\phi_n\}, \{\Omega_n\}$ e $\{Q_n\}$, respectivamente, a sucessão de polinómios ortogonais mónicos, a sucessão dos polinómios de primeira espécie, e a sucessão das funções de segunda espécie relativamente a F. O objectivo acima enunciado é cumprido através do estabelecimento da ligação entre equações do tipo $zAF' = BF^2 + CF + D$ e equações diferenciais matriciais de Sylvester para $\{Y_n\}$,

$$zAY_n' = \mathcal{B}_n Y_n - Y_n \mathcal{C},\ n \in \mathbb{N},$$

onde $\mathcal{B}_n$ e $\mathcal{C}$ são matrizes de ordem dois de entradas polinomiais que dependem dos coeficientes A, B, C, D. Saliente-se que as equações diferenciais matriciais de Sylvester são casos particulares de equações diferenciais conhecidas na literatura como equações diferenciais matriciais de Riccati,

$$W' = M_{2,1}(z) + M_{2,2}(z)W - WM_{1,1}(z) - WM_{1,2}(z)W\ ,\ z \in G\ , \qquad \text{(IV.1)}$$

com coeficientes localmente integráveis $M_{1,1}, M_{1,2}, M_{2,1}, M_{2,2}$ de dimensões $n \times n, n \times m, m \times n$ e $m \times m$, respectivamente, e onde G é um intervalo real não degenerado ou um domínio de $\mathbb{C}$. Além disso, salientamos também a seguinte propriedade deste tipo de equações: a equivalência entre um problema de valor inicial para (IV.1) e um problema de valor inicial para o sistema linear

$$\Upsilon' = M(z)\Upsilon,\ \ \Upsilon = \begin{bmatrix} \mathcal{L} \\ \mathcal{P}_n \end{bmatrix}\ ,\ M = \begin{bmatrix} M_{1,1} & M_{1,2} \\ M_{2,1} & M_{2,2} \end{bmatrix}$$

com matrizes $\mathcal{P}_n$, $\mathcal{L}$, sendo que $W(z) = \mathcal{P}_n(z)\,\mathcal{L}^{-1}(z)$. Este resultado é conhecido na literatura como Lema de Radon (cf. [**32, 53**]). Para aplicações das equações matriciais de Riccati ver [**19, 32**] e as referências aí indicadas.

Este capítulo está estruturado da forma seguinte.

Na secção 1 começamos por estabelecer a ligação com o capítulo precedente: reinterpretamnos as relações de estrutura obtidas no teorema III.1, e estabelecemos a equivalência entre $zAF' = BF^2 + CF + D$ e dois sistemas de equações diferenciais matriciais de Sylvester, $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$zAY_n' = \mathcal{B}_n Y_n - Y_n \mathcal{C} \tag{IV.2}$$

$$zA\mathcal{Q}_n' = (\mathcal{B}_n + BF + \frac{C}{2}\,I)\mathcal{Q}_n\,. \tag{IV.3}$$

Além disso, utilizando as relações de recorrência de Szegő na forma matricial

$$Y_n = \mathcal{A}_n Y_n,\ \mathcal{A}_n = \begin{bmatrix} z & a_n \\ \overline{a}_n z & 1 \end{bmatrix},\ \forall n \in \mathbb{N},$$

deduzimos equações para as matrizes $\mathcal{A}_n$, $zA\mathcal{A}_n' = \mathcal{B}_n\mathcal{A}_n - \mathcal{A}_n\mathcal{B}_{n-1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Notemos que estas relações são análogas às deduzidas em [**36**], para o caso semi--clássico de ortogonalidade real, e em [**31, 38**] para casos particulares de ortogonalidade hermitiana.

Na secção 2 estabelecemos, como consequência das equações (IV.2) e (IV.3), a seguinte caracterização para sucessões de polinómios ortogonais sobre a circunferência pertencentes à classe semi-clássica: se $\{\phi_n\}$ for uma sucessão de polinómios ortogonais relativamente a uma medida cujo peso denotamos por w, então uma condição necessária e suficiente para que $\{\phi_n\}$ seja semi-clássica é que a sucessão definida por $\tilde{Y}_n = \begin{bmatrix} \phi_n & -Q_n/w \\ \phi_n^* & Q_n^*/w \end{bmatrix}$, $n \in \mathbb{N}$, verifique sistemas diferenciais do tipo

$$zA\tilde{Y}_n' = B_n\tilde{Y}_n,\ B_n \in M^{2\times 2}(\mathbb{P})\,, \mathrm{tr}(B_n) = nA\,.$$

Este resultado generaliza um outro de Magnus para a ortogonalidade real publicado em [**36**], ao caso da ortogonalidade complexa.

A secção 3 é dedicada ao estudo das equações de Sylvester (IV.2). Tendo em atenção o Lema de Radon, obtemos a equivalência entre um problema de valor inicial para a equação de Sylvester (IV.2) e um problema de valor inicial para o sistema linear

$$\Upsilon_n' = \frac{1}{zA}\begin{bmatrix} \mathcal{C} & 0 \\ 0 & \mathcal{B}_n \end{bmatrix} \Upsilon_n, \quad \Upsilon_n = \begin{bmatrix} \mathcal{L} \\ \mathcal{P}_n \end{bmatrix}, \forall n \in \mathbb{N}\,.$$

A solução, Y_n, é dada por

$$Y_n = \mathcal{P}_n(z)\,\mathcal{L}^{-1}(z),\ \forall n \in \mathbb{N}\,,$$

sendo $\mathcal{P}_n$ e $\mathcal{L}$ soluções dos sistemas $zA\mathcal{P}_n' = \mathcal{B}_n\mathcal{P}_n$ e $zA\mathcal{L}' = \mathcal{C}\mathcal{L}$, respectivamente. O sistema diferencial $zA\mathcal{L}' = \mathcal{C}\mathcal{L}$ é estudado na subsecção 3.1. O sistema diferencial $zA\mathcal{P}_n' = \mathcal{B}_n\mathcal{P}_n$ é estudado na subsecção 3.2. Para cada $n \in \mathbb{N}$ estabelecemos uma matriz fundamental de soluções de $zA\mathcal{P}_n' = \mathcal{B}_n\mathcal{P}_n$ dada por

$$P_n = e^{\int_{z_1}^{z} \frac{\tilde{C}}{tA}dt} \begin{bmatrix} \tilde{\phi}_n & -\tilde{Q}_n/\tilde{w} \\ (\tilde{\phi}_n)^* & (\tilde{Q}_n)^*/\tilde{w} \end{bmatrix},$$

onde $\tilde{w}$ é um peso semi-clássico, $\{\tilde{\phi}_n\}$ é a respectiva sucessão de polinómios ortogonais mónicos, $\{\tilde{Q}_n\}$ a sucessão de funções de segunda espécie, e $\tilde{C}$ um polinómio (que determinamos na subsecção 3.3). Esta matriz fundamental de soluções permite-nos obter que a função de Carathéodory F que verifica $zAF' = BF^2 + CF + D$ é uma transformação racional de $\tilde{F}$, sendo $\tilde{F}$ a função de Carathéodory associada a $\tilde{w}$ (cf. teorema IV.7). Consequentemente, obtemos uma representação para $\{Y_n\}$, associada a F, em termos de uma família semi--clássica.

Finalmente, na secção 4, apresentamos um exemplo da aplicação do Lema de Radon e estudamos os polinómios associados de primeira espécie dos polinómios de Jacobi sobre a circunferência unitária.

Os resultados descritos estão em fase de preparação para submissão (cf. [**12**]).

1. Teorema de caracterização para o caso Laguerrre-Hahn

Começamos por reinterpretar as equações obtidas no teorema III.1.

TEOREMA IV.1. *Seja $u \in \mathcal{R}$ e F a respectiva função formal de Carathéodory. Sejam $\{\mathcal{Q}_n\}$ e $\{Y_n\}$ as sucessões de matrizes associadas a u dadas por (I.24)* *e (I.25), respectivamente. F verifica a equação diferencial de coeficientes polinomiais*

$$zAF' = BF^2 + CF + D \tag{IV.4}$$

se, e somente se, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{Q}_n$ e Y_n e verificam as equações

$$zA\mathcal{Q}_n' = \left(\mathcal{B}_n + (BF + C/2)\, I\right) \mathcal{Q}_n \tag{IV.5}$$

$$zAY_n' = \mathcal{B}_n Y_n - Y_n \mathcal{C}\,, \tag{IV.6}$$

onde

$$\mathcal{B}_n = \begin{bmatrix} l_{n,1} & -\Theta_{n,1} \\ -\Theta_{n,2} & l_{n,2} \end{bmatrix}, \tag{IV.7}$$

$$\mathcal{C} = \begin{bmatrix} C/2 & -D \\ B & -C/2 \end{bmatrix}, \tag{IV.8}$$

com $l_{n,1}, l_{n,2}, \Theta_{n,1}, \Theta_{n,2}$ polinómios de graus independentes de n.

Demonstração: Apesar de o resultado enunciado já ter sido demonstrado no capítulo anterior (cf. teorema III.1), apresentamos uma demonstração alternativa de que (IV.5) e (IV.6) implicam (IV.4).

Atendendo a que

$$\mathcal{Q}_n = Y_n \begin{bmatrix} F \\ -1 \end{bmatrix}, \ \forall n \in \mathbb{N},$$

resulta que (IV.5) é equivalente a

$$zAY_n' \begin{bmatrix} F \\ -1 \end{bmatrix} + zAY_n \begin{bmatrix} F' \\ 0 \end{bmatrix} = \mathcal{B}_n Y_n \begin{bmatrix} F \\ -1 \end{bmatrix} + (BF + C/2) Y_n \begin{bmatrix} F \\ -1 \end{bmatrix}.$$

De (IV.6) segue-se que

$$(\mathcal{B}_n Y_n - Y_n \mathcal{C}) \begin{bmatrix} F \\ -1 \end{bmatrix} + zAY_n \begin{bmatrix} F' \\ 0 \end{bmatrix} = \mathcal{B}_n Y_n \begin{bmatrix} F \\ -1 \end{bmatrix} + (BF + C/2) Y_n \begin{bmatrix} F \\ -1 \end{bmatrix},$$

i.e.,

$$(-Y_n \mathcal{C}) \begin{bmatrix} F \\ -1 \end{bmatrix} + zAY_n \begin{bmatrix} F' \\ 0 \end{bmatrix} = (BF + C/2) Y_n \begin{bmatrix} F \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Logo, obtemos

$$Y_n \left(zA \begin{bmatrix} F' \\ 0 \end{bmatrix} - \mathcal{C} \begin{bmatrix} F \\ -1 \end{bmatrix} \right) = (BF + C/2) Y_n \begin{bmatrix} F \\ -1 \end{bmatrix}, n \in \mathbb{N}\,.$$

Uma vez que $\det(Y_n(z)) \neq 0,\ z \neq 0,\ \forall n \in \mathbb{N}$, segue-se que

$$zA \begin{bmatrix} F' \\ 0 \end{bmatrix} - \mathcal{C} \begin{bmatrix} F \\ -1 \end{bmatrix} = (BF + C/2) \begin{bmatrix} F \\ -1 \end{bmatrix},$$

donde resulta $zAF' = BF^2 + CF + D$. □

COROLÁRIO IV.1. *Nas condições do teorema anterior, as matrizes* $\mathcal{B}_n$ *verificam:*

$$zA\mathcal{A}_n' = \mathcal{B}_n\mathcal{A}_n - \mathcal{A}_n\mathcal{B}_{n-1}\,, n \geq 2\,, \tag{IV.9}$$

$$\operatorname{tr}(\mathcal{B}_n) = nA\,, n \in \mathbb{N}\,, \tag{IV.10}$$

$$\det(\mathcal{B}_n) = \det(\mathcal{B}_1) - A\sum_{k=1}^{n-1} l_{k,2}\,, n \geq 2\,, \tag{IV.11}$$

sendo $\operatorname{tr}(\mathcal{B}_n)$ *e* $\det(\mathcal{B}_n)$ *o traço e o determinante de* $\mathcal{B}_n$*, respectivamente, e*

$$\det(\mathcal{B}_1) = \frac{A}{2\,h_1}\big(2zA\overline{a}_1 - h_1(D+B) + C(|a_1|^2+1)\big) + BD - C^2/4 \tag{IV.12}$$

com $a_1 = \phi_1(0),\ h_1 = (1 - |a_1|^2)$.

Demonstração: Para estabelecer (IV.9) derivamos $Y_n = \mathcal{A}_nY_{n-1}$ e substituímos $Y_n' = \mathcal{A}_n'Y_{n-1} + \mathcal{A}_nY_{n-1}'$ em (IV.6), $zAY_n' = \mathcal{B}_nY_n - Y_n\mathcal{C}$, donde obtemos

$$zA\mathcal{A}_n'Y_{n-1} + zA\mathcal{A}_nY_{n-1}' = \mathcal{B}_nY_n - Y_n\mathcal{C}\,, n \in \mathbb{N}\,.$$

Se utilizarmos (IV.6) para $n-1$ na equação anterior obtemos

$$zA\mathcal{A}_n'Y_{n-1} + \mathcal{A}_n\left(\mathcal{B}_{n-1}Y_{n-1} - Y_{n-1}\mathcal{C}\right) = \mathcal{B}_nY_n - Y_n\mathcal{C}\,,\ n \geq 2\,,$$

que, devido à relação de recorrência para Y_n, é dada por

$$zA\mathcal{A}_n'Y_{n-1} + \mathcal{A}_n\left(\mathcal{B}_{n-1}Y_{n-1} - Y_{n-1}\mathcal{C}\right) = \mathcal{B}_n\mathcal{A}_nY_{n-1} - \mathcal{A}_nY_{n-1}\mathcal{C}\,,\ n \geq 2\,,$$

i.e.,

$$zA\mathcal{A}_n'Y_{n-1} = \left(\mathcal{B}_n\mathcal{A}_n - \mathcal{A}_n\mathcal{B}_{n-1}\right)Y_{n-1}\,, n \geq 2\,.$$

Sendo Y_n invertível, para todo o $n \in \mathbb{N}$ e $z \neq 0$, obtemos (IV.9).

Para estabelecer (IV.10) utilizamos as equações que definem $l_{n,1}$ e $l_{n,2}$ (cf. teorema III.1),

$$\begin{cases} zA\phi_n' + C/2\phi_n - B\Omega_n + \Theta_{n,1}\phi_n^* = l_{n,1}\phi_n \\ zA\Omega_n' - C/2\Omega_n + D\phi_n - \Theta_{n,1}\Omega_n^* = l_{n,1}\Omega_n \\ zA(\Omega_n^*)' - C/2\Omega_n^* - D\phi_n^* - \Theta_{n,2}\Omega_n = l_{n,2}\Omega_n^* \\ zA(\phi_n^*)' + C/2\phi_n^* + B\Omega_n^* + \Theta_{n,2}\phi_n = l_{n,2}\phi_n^* \, . \end{cases}$$

Se multiplicarmos a primeira equação por Ω_n^*, a segunda por ϕ_n^*, a terceira por ϕ_n e a quarta por Ω_n, e as adicionarmos, obtemos, $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$zA\left(\phi_n'\Omega_n^* + \phi_n(\Omega_n^*)' + (\phi_n^*)'\Omega_n + \phi_n^*\Omega_n'\right) = \left(l_{n,1} + l_{n,2}\right)\left(\phi_n\Omega_n^* + \phi_n^*\Omega_n\right) \, ,$$

i.e.,

$$zA\left(\phi_n\Omega_n^* + \phi_n^*\Omega_n\right)' = \left(l_{n,1} + l_{n,2}\right)\left(\phi_n\Omega_n^* + \phi_n^*\Omega_n\right) \, .$$

Se utilizarmos (I.15), $\phi_n\Omega_n^* + \phi_n^*\Omega_n = 2h_n z^n$, obtemos o requerido.

Finalmente, estabeleça-se (IV.11). De (IV.9) obtemos, para $n \geq 2$,

$$\det(\mathcal{B}_n\mathcal{A}_n) = \det(zA\mathcal{A}_n' + \mathcal{A}_n\mathcal{B}_{n-1}) \, .$$

Tendo em atenção que $\mathcal{B}_n$ é dada por (IV.7) e que $\mathcal{A}_n = \begin{bmatrix} z & a_n \\ \overline{a}_n z & 1 \end{bmatrix}$, resulta que

$$\det(\mathcal{B}_n)\det(\mathcal{A}_n) = z(1 - |a_n|^2)\left(\det(\mathcal{B}_{n-1}) + A\, l_{n-1,2}\right), \ \forall n \geq 2 \, .$$

Uma vez que $\det(\mathcal{A}_n) = z(1 - |a_n|^2)$, então a última equação é equivalente, para $z \neq 0$, a

$$\det(\mathcal{B}_n) = \det(\mathcal{B}_{n-1}) + A\, l_{n-1,2} \, , \ \forall n \geq 2 \, ,$$

donde se segue (IV.11). Além disso, se calcularmos $\det(\mathcal{B}_1)$ fazendo $n = 1$ em (IV.6) obtemos (IV.12). $\square$

OBSERVAÇÃO .

1. As equações (IV.9) são equivalentes às equações (III.46)-(III.50).

2. A equação (IV.9) é equivalente às equações, para $n \geq 2$,

$$a_n l_{n,1} - \Theta_{n,1} = -z\Theta_{n-1,1} + a_n l_{n-1,2} \tag{IV.13}$$

$$z l_{n,1} - \overline{a}_n z\Theta_{n,1} = z l_{n-1,1} - a_n \Theta_{n-1,2} + zA \tag{IV.14}$$

$$-z\Theta_{n,2} + \overline{a}_n z l_{n,2} = \overline{a}_n z l_{n-1,1} - \Theta_{n-1,2} + \overline{a}_n zA \tag{IV.15}$$

$$-a_n \Theta_{n,2} + l_{n,2} = -\overline{a}_n z\Theta_{n-1,1} + l_{n-1,2}\,. \tag{IV.16}$$

2. Teorema de caracterização para o caso semi-clássico

Começamos por recordar alguns resultados relativos a sistemas diferenciais lineares de primeira ordem (os dois teoremas que se seguem, assim como a definição seguinte, podem ser encontrados, por exemplo, em [**18**]).

TEOREMA IV.2. *Seja G um domínio de $\mathbb{C}$, M uma matriz de ordem n cujas entradas são funções analíticas em G, e X um vector de ordem n. Considere-se o sistema diferencial homogéneo*

$$X'(t) = M(t)X(t),\ t \in G\,, \tag{IV.17}$$

com condições iniciais

$$X(t_0) = X_0,\ t_0 \in G\,. \tag{IV.18}$$

Então:

a) O conjunto das soluções de (IV.17) é um espaço vectorial de dimensão n;

b) Existe unicidade da solução de (IV.17) sujeito a (IV.18).

DEFINIÇÃO IV.1. Seja S o espaço vectorial definido pelas soluções de (IV.17). Uma base de S designa-se *sistema fundamental de soluções*. Uma função matricial $\mathcal{X}$ de ordem n cujas colunas formam um sistema fundamental de soluções designa-se por *matriz fundamental do sistema*.

TEOREMA IV.3. *Seja $\mathcal{X}$ uma matriz fundamental do sistema diferencial linear (IV.17). Então,*

$$\det(\mathcal{X})' = \operatorname{tr}(M)\det(\mathcal{X})\,, \tag{IV.19}$$

onde $\operatorname{tr}(M)$ *designa o traço de M.*

No teorema que se segue consideramos uma medida μ sobre $\mathbb{T}$ associada a um peso w do tipo (II.13),

$$d\mu(\theta) = w(\theta)\frac{d\theta}{2\pi} + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \delta(z_k), \ |z_k| = 1, \ \lambda_k > 0, \ k = 1, ..., m.$$

Vejamos, de seguida, que o teorema IV.1 nos permite obter uma caracterização para sucessões de polinómios semi-clássicos sobre $\mathbb{T}$ em termos de de sistemas diferenciais. O resultado seguinte é uma extensão do resultado estabelecido por Magnus em [**36**], para sucessões de polinómios semi-clássicas sobre a recta real, e mostra-nos que a condição necessária dada em [**10**] para que uma sucessão de polinómios ortogonais mónicos sobre $\mathbb{T}$ seja semi-clássica é também suficiente.

TEOREMA IV.4. *Seja $\{\phi_n\}$ uma SPOM relativamente a uma medida μ do tipo (II.13) cuja parte absolutamente conínua denotamos por w, $\{Q_n\}$ a sucessão das funções de segunda espécie e $\tilde{Y}_n = \begin{bmatrix} \phi_n & -Q_n/w \\ \phi_n^* & Q_n^*/w \end{bmatrix}$, $n \in \mathbb{N}$. Então, μ é semi-clássica e w é dado por*

$$w = Ke^{\int_{z_0}^{z} \frac{C}{tA}dt}, \ K \in \mathbb{C}, \tag{IV.20}$$

se, e somente se, $\tilde{Y}_n$ verifica o sistema diferencial

$$zA\tilde{Y}_n' = \left(\mathcal{B}_n - \frac{C}{2}\, I\right)\tilde{Y}_n\,, \ n \in \mathbb{N}\,, \tag{IV.21}$$

onde $\mathcal{B}_n$ é a matriz associada à equação $zAF' = CF + P_{A,C}$ verificada pela respectiva função de Carathéodory.

Demonstração: Se w é dada por (IV.20) então $\dfrac{w'}{w} = \dfrac{C}{zA}$. Do corolário II.6 temos que F verifica $zAF' = CF + D$ para um polinómio específico D. Do teorema IV.1 temos

$$zA \begin{bmatrix} -Q_n'/w \\ (Q_n^*)'/w \end{bmatrix} = (\mathcal{B}_n + C/2\, I) \begin{bmatrix} -Q_n/w \\ Q_n^*/w \end{bmatrix} \tag{IV.22}$$

e

$$zA \begin{bmatrix} \phi_n \\ \phi_n^* \end{bmatrix}' = (\mathcal{B}_n - C/2\, I) \begin{bmatrix} \phi_n \\ \phi_n^* \end{bmatrix}\,. \tag{IV.23}$$

Por outro lado, de $\dfrac{w'}{w} = \dfrac{C}{zA}$, obtemos

$$zA \begin{bmatrix} -Q_n/w \\ Q_n^*/w \end{bmatrix}' = zA \begin{bmatrix} -Q_n'/w \\ (Q_n^*)'/w \end{bmatrix} - C\, I \begin{bmatrix} -Q_n/w \\ Q_n^*/w \end{bmatrix} . \tag{IV.24}$$

Se substituirmos (IV.22) em (IV.24) obtemos

$$zA \begin{bmatrix} -Q_n/w \\ Q_n^*/w \end{bmatrix}' = (\mathcal{B}_n - C/2\, I) \begin{bmatrix} -Q_n/w \\ Q_n^*/w \end{bmatrix} . \tag{IV.25}$$

Finalmente, (IV.25) e (IV.23) são escritas como

$$zA \begin{bmatrix} \phi_n & -Q_n/w \\ \phi_n^* & Q_n^*/w \end{bmatrix}' = (\mathcal{B}_n - C/2\, I) \begin{bmatrix} \phi_n & -Q_n/w \\ \phi_n^* & Q_n^*/w \end{bmatrix} ,$$

e obtemos (IV.21).

Reciprocamente, se $\tilde{Y}_n$ verifica um sistema diferencial tipo (IV.21), $zA\tilde{Y}_n' = (\mathcal{B}_n - \frac{C}{2}\, I)\tilde{Y}_n$, pelo corolário IV.3 obtemos

$$\det(\tilde{Y}_n)' = \frac{\operatorname{tr}(\mathcal{B}_n - \frac{C}{2}\, I)}{zA} \det(\tilde{Y}_n) .$$

Uma vez que $\det(\tilde{Y}_n) = 2h_n z^n/w$, a equação anterior é equivalente a

$$\frac{w'}{w} = \frac{nA - \operatorname{tr}(\mathcal{B}_n - \frac{C}{2}\, I)}{zA} . \tag{IV.26}$$

Por outro lado, do corolário IV.1 temos temos $\operatorname{tr}(\mathcal{B}_n) = nA$, donde $\operatorname{tr}(\mathcal{B}_n - \frac{C}{2}\, I) = nA - C$. Logo, (IV.26) é dada por

$$\frac{w'}{w} = \frac{C}{zA} ,$$

ou seja, w é um peso semi-clássico, dado por (IV.20). $\square$

3. Representação das famílias de polinómios ortogonais Laguerre-Hahn

Na introdução a este capítulo referimos que as equações matriciais de Sylvester são casos particulares de equações matriciais de Riccati. No teorema seguinte vemos que toda a equação diferencial matricial de Riccati é localmente equivalente a um sistema diferencial linear de primeira ordem. Este resultado é conhecido desde o trabalho de Radon [**53**] (ver também [**32**]).

TEOREMA IV.5 (Lema de Radon). *Seja*

$$W'(t) = M_{21}(t) + M_{22}(t)W(t) - W(t)M_{11}(t) - W(t)M_{12}(t)W(t) \tag{IV.27}$$
$$W(t_0) = W_0 \ (t \in \mathbb{C} \text{ ou } t \in \mathbb{R})$$

uma equação matricial de Riccati, onde $M_{11} \in \mathbb{R}^{n\times n}, M_{12} \in \mathbb{R}^{n\times m}, M_{21} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ *e* $M_{22} \in \mathbb{R}^{m\times m}$ *são matrizes cujos elementos são funções localmente integráveis definidas no intervalo* $[t_0, t_f] \subset \mathbb{R}$. *Então:*
a) Se W *for uma solução de (IV.27) no intervalo* $[t_0, t_f] \subset \mathbb{R}$ *e se* L *for uma solução do problema de valor inicial*

$$L' = (M_{11} + M_{12}W)L, \ \ L(t_0) = I_n \ (I_n \text{ é a matriz identidade de ordem } n)$$

e $P(t) := W(t)L(t)$, *então o vector* $[L \ \ P]^T$ *é uma solução do sistema linear de equações diferenciais*

$$\begin{bmatrix} L \\ P \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L \\ P \end{bmatrix}. \tag{IV.28}$$

b) Se $[L \ \ P]^T$ *for uma solução real do sistema diferencial (IV.28) tal que* $L(t) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *é regular para* $t \in [t_0, t_f]$, *então*

$$W : [t_0, t_f] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{m\times n}, \ \ t \mapsto W(t) = P(t)\, L^{-1}(t)$$

é uma solução real de (IV.27).
c) No caso de t *pertencer a* $\mathbb{C}$ *e as matrizes* $M_{11}, M_{12}, M_{13}, M_{14}$ *serem matrizes complexas, as afirmações a) e b) permanecem verdadeiras se substituirmos o intervalo* $[t_0, t_f]$ *por um domínio arbitrário do plano complexo* $G \subset \mathbb{C}$, *com* $t_0 \in G$.

OBSERVAÇÃO . Se $M_{1,2} \equiv 0$, a equação (IV.27) é designada por *equação matricial de Sylvester.*

O Lema de Radon tem um papel muito importante no estabelecimento dos resultados das secções que se seguem, uma vez que nos permite resolver as equações de Sylvester (IV.6) através da resolução de dois sistemas diferenciais lineares. Além disso, permite-nos estabelecer uma representação para a solução de (IV.6) (num certo domínio G).

TEOREMA IV.6. *Para $n \in \mathbb{N}$, seja (IV.6) a equação diferencial de Sylvester*

$$zAY_n' = \mathcal{B}_n Y_n - Y_n \mathcal{C}\,,$$

onde as matrizes $\mathcal{B}_n$ e $\mathcal{C}$ são dadas, respectivamente, por (IV.7) e (IV.8). Seja $G \subset \mathbb{C}$ um domínio tal que os elementos das matrizes $\mathcal{B}_n/(zA)$ e $\mathcal{C}/(zA)$ são localmente integráveis em G, e $z_0 \in G$. Se as matrizes $\mathcal{P}_n$ e $\mathcal{L}$ ($\mathcal{L}$ invertível) verificarem

$$\begin{cases} zA(z)\mathcal{L}'(z) = \mathcal{C}(z)\mathcal{L}(z) \\ \mathcal{L}(z_0) = I \end{cases} \tag{IV.29}$$

e

$$\begin{cases} zA(z)\mathcal{P}_n'(z) = \mathcal{B}_n(z)\mathcal{P}_n(z) \\ \mathcal{P}_n(z_0) = Y_n(z_0)\,, \end{cases} \tag{IV.30}$$

então as soluções de (IV.6) têm a seguinte representação em G, $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$Y_n = \mathcal{P}_n \mathcal{L}^{-1}\,. \tag{IV.31}$$

A solução de (IV.6) é dada por

$$Y_n(z) = P_n(z) E_n L^{-1}(z)\,, \tag{IV.32}$$

onde L é uma matriz fundamental do sistema (IV.29), P_n é uma matriz fundamental do sistema (IV.30), e

$$E_n = (P_n(z_0))^{-1} Y_n(z_0) L(z_0)\,, \tag{IV.33}$$

a matriz das condições iniciais.

Demonstração: Se $\{Y_n\}$ for solução de (IV.27) com

$$M_{12} = M_{21} = 0, M_{11} = \mathcal{C}/(zA), M_{22} = \mathcal{B}_n/(zA),$$

então, de acordo com ii) do lema de Radon, se o vector $[\mathcal{L} \;\; P_n]^T$ for solução de

$$zA \begin{bmatrix} \mathcal{L}' \\ P_n' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{C} & 0 \\ 0 & \mathcal{B}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{L} \\ P_n \end{bmatrix},$$

obtemos que a solução de (IV.6) é dada por

$$Y_n = \mathcal{P}_n \mathcal{L}^{-1}\,,\ \forall n \in \mathbb{N}\,.$$

Uma vez que a solução geral de (IV.29) é dada por

$$\mathcal{L}(z) = L(z)L(t_0)^{-1}\,,$$

onde L é uma matriz fundamental do sistema (IV.29), e a solução geral de (IV.30) é dada por

$$\mathcal{P}_n(z) = P_n(z)(P_n(z_0))^{-1}Y_n(z_0)\,,$$

onde P_n é uma matriz fundamental do sistema (IV.30), resulta que (IV.31) é dada por (IV.32). □

Salientamos que a determinação da matriz fundamental de sistemas diferenciais lineares com coeficientes não constantes não é trivial, no sentido de não existir um método que dê explicitamente a matriz fundamental de soluções. De seguida veremos algumas notas acerca da resolução dos sistemas diferenciais lineares correspondentes aos problemas de valor inicial (IV.29) e (IV.30). Consideraremos as hipóteses do teorema IV.6 e $z_0 \in G$.

3.1. Parte I.

Procuramos uma matriz fundamental de soluções do sistema diferencial correspondente ao problema de valor inicial (IV.29), ou seja, procuramos L, de ordem 2, que verifique

$$zA(z)L'(z) = \mathcal{C}(z)L(z), \quad \mathcal{C} = \begin{bmatrix} C/2 & -D \\ B & -C/2 \end{bmatrix} \tag{IV.34}$$

e tal que $\det(L(z_0)) \neq 0$. Note-se que é suficiente verificar-se $\det(L(z_0)) \neq 0$, para algum $z_0 \in G$, para que se verifique $\det(L(z)) \neq 0\,,\ \forall z \in G$.

LEMA IV.1. *Se L for uma matriz fundamental de soluções de (IV.29), então*

$$\det(L(z)) = \det(L(z_0))\,,$$

para algum $z_0 \in G$.

Demonstração: Pelo corolário IV.3 (cf. (IV.19)) temos que

$$\det(L)' = \frac{\operatorname{tr}(\mathcal{C})}{zA}\det(L)\,.$$

Uma vez que $\operatorname{tr}(\mathcal{C}) = 0$, resulta que $\det(L)' = 0$, ou seja,

$$\det(L) = const\,.$$

Logo, podemos escrever $\det(L(z)) = \det(L(z_0))$, para algum $z_0 \in G$. $\square$

Se designarmos as colunas de $L(z)$ por $L_1(z),\ L_2(z)$, resolveremos

$$zA(z)L_1'(z) = \mathcal{C}(z)L_1(z)\,, \tag{IV.35}$$

$$zA(z)L_2'(z) = \mathcal{C}(z)L_2(z)\,. \tag{IV.36}$$

LEMA IV.2. *Seja $\mathcal{C}$ a função matricial dada por* $\mathcal{C} = \begin{bmatrix} C/2 & -D \\ B & -C/2 \end{bmatrix}$. *Então, verifica-se que:*

a) $\mathcal{C}^2(z) = \beta(z)\, I$, *com* $\beta = (\frac{C}{2})^2 - BD$ *e* I *a matriz identidade de ordem dois;*

b) Os valores próprios de $\mathcal{C}$ *são* $\pm\sqrt{\beta}$*;*

c) O espaço próprio associado ao valor próprio $-\sqrt{\beta}$ *é gerado por*

$$V_{-\sqrt{\beta}} = \begin{bmatrix} D \\ \frac{C}{2} + \sqrt{\beta} \end{bmatrix}\,; \tag{IV.37}$$

d) O espaço próprio associado ao valor próprio $\sqrt{\beta}$ *é gerado por*

$$V_{\sqrt{\beta}} = \begin{bmatrix} D \\ \frac{C}{2} - \sqrt{\beta} \end{bmatrix}\,. \tag{IV.38}$$

LEMA IV.3. *Se* $L = [L_1\ L_2]$ *for solução de (IV.34), então*

$$zAL_1' = \sqrt{\beta}L_1 + zAc_1V_{-\sqrt{\beta}}\,, \tag{IV.39}$$

$$zAL_2' = -\sqrt{\beta}L_2 + zAc_2V_{\sqrt{\beta}}\,, \tag{IV.40}$$

onde c_1, c_2 *são funções.*

Demonstração: Se multiplicarmos a equação (IV.35) (à esquerda) por $\mathcal{C}$ e atendermos a que $\mathcal{C}^2 = \beta$, obtemos $zA\,\mathcal{C}\,L_1' = \beta\, L_1$, ou seja,

$$\frac{zA}{\sqrt{\beta}}\mathcal{C}\,L_1' = \sqrt{\beta}\,L_1\,. \tag{IV.41}$$

Se somarmos (IV.35) com (IV.41) obtemos

$$\frac{zA}{\sqrt{\beta}}(\mathcal{C} + \sqrt{\beta}\,I)L_1' = (\mathcal{C} + \sqrt{\beta}\,I)L_1\,,$$

donde,

$$(\mathcal{C} + \sqrt{\beta}\,I)\left(L_1' - \frac{\sqrt{\beta}}{zA}L_1\right) = 0_{2\times 1}\,.$$

Logo, $L_1' - \frac{\sqrt{\beta}}{zA}L_1$ é um vector próprio de $\mathcal{C}$ associado ao valor próprio $-\sqrt{\beta}$, donde

$$L_1' - \frac{\sqrt{\beta}}{zA}L_1 = c_1(z)V_{-\sqrt{\beta}}\,,$$

para alguma função c_1.

De modo análogo, se subtrairmos (IV.41) a (IV.34), obtemos

$$(\mathcal{C} - \sqrt{\beta}\, I)\left(L_2' + \frac{\sqrt{\beta}}{zA}L_2\right) = 0_{2\times 1}\,,$$

e concluimos que $L_2' + \frac{\sqrt{\beta}}{zA}L_2$ é um vector próprio de $\mathcal{C}$ associado ao valor próprio $\sqrt{\beta}$, donde

$$L_2' + \frac{\sqrt{\beta}}{zA}L_2 = c_2(z)V_{\sqrt{\beta}}\,,$$

para alguma função c_2. Assim, obtemos (IV.39) e (IV.40). $\square$

3.2. Parte II.

Procuramos uma matriz fundamental de soluções do sistema diferencial correspondente ao problema de valor inicial (IV.30), ou seja, procuramos matrizes P_n de ordem dois que verificam, para $n \in \mathbb{N}$,

$$zAP_n' = \mathcal{B}_n P_n\,. \tag{IV.42}$$

No que se segue consideramos $t_1 \in \mathbb{C}$ e $\tilde{C}$ uma função analítica tal que $\int_{z_1}^{z} \frac{\tilde{C}/2}{tA}dt$ esteja definida, para $z \in G$.

LEMA IV.4. *$\tilde{P}_n$ verifica*

$$zA\tilde{P}_n' = (\mathcal{B}_n - \frac{\tilde{C}}{2}\, I)\tilde{P}_n \tag{IV.43}$$

se, e somente se, $P_n = e^{\int_{z_1}^{z} \frac{\tilde{C}/2}{tA}dt}\, \tilde{P}_n$ verifica (IV.42).

Demonstração: Seja $\tilde{P}_n$ uma solução de (IV.43). Temos que

$$zA(e^{\int_{z_1}^{z} \frac{\tilde{C}/2}{tA}dt}\, \tilde{P}_n)' = \frac{\tilde{C}}{2}e^{\int_{z_1}^{z} \frac{\tilde{C}/2}{tA}dt}\, \tilde{P}_n + zA\tilde{P}_n' e^{\int_{z_1}^{z} \frac{\tilde{C}/2}{tA}dt}\,.$$

Uma vez que $\tilde{P}_n$ verifica (IV.43), temos que

$$\frac{\tilde{C}}{2}e^{\int_{z_1}^{z} \frac{\tilde{C}/2}{tA}dt}\, \tilde{P}_n + zA\tilde{P}_n' e^{\int_{z_1}^{z} \frac{\tilde{C}/2}{tA}dt} = \frac{\tilde{C}}{2}e^{\int_{z_1}^{z} \frac{\tilde{C}/2}{tA}dt}\, \tilde{P}_n + (\mathcal{B}_n - \frac{\tilde{C}}{2}\, I)\tilde{P}_n e^{\int_{z_1}^{z} \frac{\tilde{C}/2}{tA}dt}\,.$$

Assim, obtemos

$$zA(e^{\int_{z_1}^{z} \frac{\tilde{C}/2}{tA}dt}\, \tilde{P}_n)' = \mathcal{B}_n\tilde{P}_n e^{\int_{z_1}^{z} \frac{\tilde{C}/2}{tA}dt}\,,$$

ou seja, $P_n = e^{\int_{z_1}^{z} \frac{\tilde{C}/2}{tA} dt}\, \tilde{P}_n$ é solução de (IV.42). Analogamente se verifica que o recíproco também é válido. □

Tendo em atenção o teorema IV.4, doravante consideraremos $\tilde{C}$ um polinómio e procuraremos, para cada $n \in \mathbb{N}$, uma solução de (IV.43) dada por

$$\tilde{P}_n = \begin{bmatrix} \tilde{\phi}_n & -\tilde{Q}_n/\tilde{w} \\ (\tilde{\phi}_n)^* & (\tilde{Q}_n)^*/\tilde{w} \end{bmatrix}, \tag{IV.44}$$

onde $\{\tilde{\phi}_n\}$ é uma SPOM relativamente a uma medida $\tilde{\mu}$ cuja parte absolutamente contínua denotamos por $\tilde{w}$, e $\{\tilde{Q}_n\}$ é a sucessão de funções de segunda espécie. Logo, $\{P_n\}$ será dada por

$$P_n = e^{\int_{z_1}^{z} \frac{\tilde{C}/2}{tA} dt}\, \tilde{P}_n\,,\ n \in \mathbb{N}\,. \tag{IV.45}$$

LEMA IV.5. *Seja F uma função de Carathéodory Laguerre-Hahn que verifica $zAF' = BF^2 + CF + D$ e $\{\phi_n\}$ a respectiva SPOM. Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja P_n uma solução do respectivo sistema (IV.30), $zAP_n' = \mathcal{B}_n P_n$. Se $\{P_n\}$ for definida por (IV.45), então temos que:*

$$P_n = \tilde{\mathcal{A}}_n P_{n-1},\ \tilde{\mathcal{A}}_n = \begin{bmatrix} z & \tilde{a}_n \\ \overline{\tilde{a}}_n z & 1 \end{bmatrix},\ n \in \mathbb{N}\,, \tag{IV.46}$$

$$zA\tilde{\mathcal{A}}_n' = \mathcal{B}_n\tilde{\mathcal{A}}_n - \tilde{\mathcal{A}}_n\mathcal{B}_{n-1}\,,\ n \geq 2\,. \tag{IV.47}$$

Os polinómios que compõem a matriz $\mathcal{B}_n$ verificam, para todo o $n \geq 2$,

$$\overline{\lambda}_n\Theta_{n,1} = \lambda_n\Theta_{n-1,2}\,, \tag{IV.48}$$

$$\lambda_n l_{n,1} = \lambda_n l_{n-1,2}\,, \tag{IV.49}$$

$$\overline{\lambda}_n\Theta_{n-1,1} = \lambda_n\Theta_{n,2}\,, \tag{IV.50}$$

$$\overline{\lambda}_n l_{n,2} - \overline{\lambda}_n l_{n-1,1} = \overline{\lambda}_n zA\,, \tag{IV.51}$$

com $a_n = \phi_n(0),\ \tilde{a}_n = \tilde{\phi}_n(0),\ \lambda_n = a_n - \tilde{a}_n,\ \forall n \in \mathbb{N}$.

Demonstração: Para estabelecer (IV.46) recordamos que $\tilde{P}_n$ verifica as relações de recorrência de Szegő na forma matricial

$$\tilde{P}_n = \tilde{\mathcal{A}}_n\tilde{P}_{n-1},\ \ \tilde{\mathcal{A}}_n = \begin{bmatrix} z & \tilde{a}_n \\ \overline{\tilde{a}}_n z & 1 \end{bmatrix},\ n \in \mathbb{N}\,,$$

sendo $(\tilde{a}_n)$ a sucessão dos coeficientes de reflexão de $\{\tilde{\phi}_n\}$. Consequentemente, P_n dada por (IV.45) verifica (IV.46).

Para estabelecer (IV.47) utilizamos $P_n = \tilde{\mathcal{A}}_n P_{n-1}$ em $zAP_n' = \mathcal{B}_n P_n$, obtendo assim

$$zA\tilde{\mathcal{A}}_n' P_{n-1} + \tilde{\mathcal{A}}_n zAP_{n-1}' = \mathcal{B}_n \tilde{\mathcal{A}}_n P_{n-1}\, , \; n \geq 2\, .$$

Logo,

$$zA\tilde{\mathcal{A}}_n' P_{n-1} + \tilde{\mathcal{A}}_n \mathcal{B}_{n-1} P_{n-1} = \mathcal{B}_n \tilde{\mathcal{A}}_n P_{n-1}\, ,$$

donde

$$(zA\tilde{\mathcal{A}}_n' + \tilde{\mathcal{A}}_n \mathcal{B}_{n-1}) P_{n-1} = \mathcal{B}_n \tilde{\mathcal{A}}_n P_{n-1}\, .$$

Uma vez que $\det(P_n) \neq 0\, ,\ \forall n \in \mathbb{N}\, ,\ z \neq 0\, ,$ resulta que P_n é invertível, donde

$$zA\tilde{\mathcal{A}}_n' + \tilde{\mathcal{A}}_n \mathcal{B}_{n-1} = \mathcal{B}_n \tilde{\mathcal{A}}_n\, , \; n \geq 2\, ,$$

conforme requerido.

Agora, de (IV.9) e de (IV.47) obtemos, para $n \geq 2\, ,$

$$zA(\mathcal{A}_n - \tilde{\mathcal{A}}_n)' = \mathcal{B}_n(\mathcal{A}_n - \tilde{\mathcal{A}}_n) - (\mathcal{A}_n - \tilde{\mathcal{A}}_n)\mathcal{B}_{n-1}\, ,$$

i.e.,

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \overline{\lambda}_n zA & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\overline{\lambda}_n \Theta_{n,1} & \lambda_n l_{n,1} \\ \overline{\lambda}_n l_{n,2} & -\lambda_n \Theta_{n,2} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -\lambda_n \Theta_{n-1,2} & \lambda_n l_{n-1,2} \\ \overline{\lambda}_n l_{n-1,1} & -\overline{\lambda}_n \Theta_{n-1,1} \end{bmatrix}\, ,$$

com $\lambda_n = a_n - \tilde{a}_n$, ou seja, obtemos (IV.48)-(IV.51). $\square$

Doravante utilizaremos a notação $T_{(a,b;c,d)}$ para indicar a tansformação do tipo racional-linear dada por $T(F) = \dfrac{a+bF}{c+dF}\, .$

TEOREMA IV.7. *Seja F uma função de Carathéodory Laguerre-Hahn que verifica $zAF' = BF^2 + CF + D$ e $\{\phi_n\}$ a respectiva SPOM. Seja $\{P_n\}$ uma solução do respectivo sistema diferencial (IV.30) tal que $\{P_n\}$ é dada por (IV.45), e seja $\tilde{F}$ a função de Carathéodory associada a $\{\tilde{\phi}_n\}$. Então, existe uma única transformação do tipo racional-linear, $T_{(a,b;c,d)}$, com $a, b, c, d \in \mathbb{P}$ e $ad - bc \neq 0$, tal que $F = T_{(a,b;c,d)}(\tilde{F})$.*

Demonstração: Para mostrar que F é uma transformação racional-linear de $\tilde{F}$ começamos por estabelecer que os coeficientes de reflexão de $\{\phi_n\}$ e de $\{\tilde{\phi}_n\}$ diferem apenas num número finito de índices.

Seja $\lambda_n = a_n - \tilde{a}_n$, com $a_n = \phi_n(0), \tilde{a}_n = \tilde{\phi}_n(0)$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Começamos por estabelecer que o conjunto $\mathcal{Z} = \{n \in \mathbb{N} : \lambda_n \neq 0\}$ é finito.

Se $\mathcal{Z}$ fosse infinito, com $\mathcal{Z} = \mathbb{N}$, teríamos que $\lambda_n \neq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$. De (IV.49), obteríamos

$$l_{n,1} = l_{n-1,2}, \ \forall n \geq 2 \,.$$

Substituindo em (IV.13) resultaria

$$\Theta_{n,1} = z\Theta_{n-1,1} \,, \ \forall n \geq 2 \,,$$

donde

$$\Theta_{n,1} = z^n \Theta_{1,1} \,, \forall n \in \mathbb{N} \,.$$

Mas tal contradiz a limitação do grau de Θ_n. Além disso, se considerarmos, sem perda de generalidade, a situação

$$\begin{cases} a_n = \tilde{a}_n, \ n = 1, 2, ..., n_0 \\ a_n \neq \tilde{a}_n, \ n \geq n_0 \,, \end{cases}$$

para algum $n_0 \in \mathbb{N}$, chegamos à mesma conclusão. Logo, conclui-se que $\mathcal{Z}$ é finito e, assim, os coeficientes de reflexão de $\{\phi_n\}$ e de $\{\tilde{\phi}_n\}$ diferem apenas num número finito de índices.

Para concluir que F é uma transformação racional-linear de $\tilde{F}$ do tipo indicado, basta atender à sua representação em fracção contínua (cf. teorema I.6).

Para estabelecer a unicidade de $T_{(a,b;c,d)}$ começamos por observar que a inversa de uma transformação $T_{(a,b;c,d)}$, com $ad - bc \neq 0$, existe e é dada por $T_{(a,-c;-b,d)}$. Logo, se T_1 e T_2 forem duas transformações do tipo racional-linear tais que $T_1(\tilde{F}) = T_2(\tilde{F})$, a composição $T_2^{-1} \circ T_1$ é tal que $(T_2^{-1} \circ T_1)(\tilde{F}) = \tilde{F}$, donde se segue que $T_2^{-1} \circ T_1 = id$, i.e., $T_1 = T_2$. Fica, assim, estabelecida a unicidade de T. $\square$

OBSERVAÇÃO . A obtenção da transformação $T_{(a,b;c,d)}$ é equivalente à determinação dos polinómios a, b, c, d. Conhecidos os índices $n \in \mathbb{N}$ para os quais $a_n \neq \tilde{a}_n$, os polinómios a, b, c, d podem ser determinados utilizando as expansões de F e de $\tilde{F}$ em fracção contínua (cf. teorema I.6).

Pelo teorema IV.4, determinar uma solução do tipo (IV.44), sendo $\tilde{C} \in \mathbb{P}$, é equivalente a obter o peso semi-clássico $\tilde{w} = Ke^{\int_{z_1}^{z} \frac{\tilde{C}}{tA} dt}$, $K \in \mathbb{C}$. No entanto, no que se segue veremos outro processo de determinação de $\tilde{w}$.

LEMA IV.6. *Seja F uma função de Carathéodory Laguerre-Hahn que verifica $zAF' = BF^2 + CF + D$, (IV.6) as respectivas equações de Sylvester $zAY_n' = \mathcal{B}_n Y_n - Y_n \mathcal{C}$, (IV.29), (IV.30) os problemas de valor inicial associados a (IV.6), e L, P_n as respectivas matrizes fundamentais, com $P_n(z_0)$ e $Y_n(z_0)$ invertíveis. Se P_n for definida por (IV.45), então:*
a) as matrizes E_n dadas por (IV.33) verificam

$$\det(E_n) = K_1 h_n / \tilde{h}_n \,; \tag{IV.52}$$

b) $\tilde{w}$ é dado por

$$\tilde{w}(z) = K_2 e^{\int_{z_1}^{z} \frac{\tilde{C}}{tA} dt} , \tag{IV.53}$$

com

$$K_1 = \tilde{w}(z_0) \det(L(z_0)) e^{\int_{z_1}^{z_0} \frac{\tilde{C}}{tA} dt} , \; K_2 = \tilde{w}(z_0) e^{\int_{z_1}^{z_0} \frac{\tilde{C}}{tA} dt} ,$$

$$h_n = \prod_{k=1}^{n} (1 - |a_k|^2) \,, \; \tilde{h}_n = \prod_{k=1}^{n} (1 - |\tilde{a}_k|^2) \,.$$

Demonstração: a) Se calcularmos os determinantes das matrizes E_n dadas por (IV.33), $E_n = (P_n(z_0))^{-1} Y_n(z_0) L(z_0)$, obtemos

$$\det(E_n) = \frac{\det(Y_n(z_0)) \det(L(z_0))}{\det(P_n(z_0))} \,.$$

Sendo $P_n = \tilde{P}_n e^{\int_{z_1}^{z} \frac{\tilde{C}/2}{tA} dt}$, obtemos

$$\det(E_n) = \frac{\det(Y_n(z_0)) \det(L(z_0))}{\det(\tilde{P}_n(z_0)) e^{\int_{t_1}^{z_0} \frac{\tilde{C}}{tA} dt}} \,. \tag{IV.54}$$

Uma vez que $\tilde{P}_n$ é dada por (IV.44), temos as equações

$$\det(Y_n(z_0)) = \phi_n(z_0) \Omega_n^*(z_0) + \phi_n^*(z_0) \Omega_n(z_0) \,,$$
$$\det(\tilde{P}_n(z_0)) = \frac{\tilde{\phi}_n(z_0) \tilde{Q}_n^*(z_0) + \tilde{\phi}_n^*(z_0) \tilde{Q}_n(z_0)}{\tilde{w}(z_0)} \,,$$

e, do corolário I.2, as equações

$$\det(Y_n(z_0)) = 2h_n z_0^n, \quad h_n = \prod_{k=1}^{n}(1-|a_k|^2)\,,$$
$$\det(\tilde{P}_n(z_0)) = \frac{2\tilde{h}_n z_0^n}{\tilde{w}(z_0)}, \quad \tilde{h}_n = \prod_{k=1}^{n}(1-|\tilde{a}_k|^2)\,.$$

Se substituirmos $\det(Y_n(z_0))$ e $\det(\tilde{P}_n(z_0))$ acima indicados em (IV.54) obtemos (IV.52).

b) Aplicando determinantes a (IV.32), $Y_n(z) = P_n(z)E_nL^{-1}(z)$, vem que

$$\det(Y_n) = \det(P_n)\det(E_n)\det(L)^{-1}\,. \tag{IV.55}$$

De $P_n = \tilde{P}_n e^{\int_{z_1}^{z}\frac{\tilde{C}/2}{tA}dt}$ obtemos que $\det(P_n) = \det(\tilde{P}_n)e^{\int_{z_1}^{z}\frac{\tilde{C}}{tA}dt}$ e, uma vez que $\tilde{P}_n$ é dada por (IV.44), obtemos

$$\det(\tilde{P}_n) = \frac{2\tilde{h}_n z^n}{\tilde{w}(z)}\,, \text{ com } \tilde{h}_n = \prod_{k=1}^{n}(1-|\tilde{a}_k|^2)\,,$$

donde

$$\det(P_n) = \frac{2\tilde{h}_n z^n}{\tilde{w}(z)}e^{\int_{z_1}^{z}\frac{\tilde{C}}{tA}dt}.$$

Logo, a equação (IV.55) é equivalente a

$$2h_n z^n = \frac{2\tilde{h}_n z^n}{\tilde{w}(z)}e^{\int_{z_1}^{z}\frac{\tilde{C}}{tA}dt}\det(E_n)\det(L)^{-1} \tag{IV.56}$$

com $h_n = \prod_{k=1}^{n}(1-|a_k|^2)$. Substituindo (IV.52) em (IV.56) obtemos

$$\tilde{w}(z) = K_1\frac{e^{\int_{z_1}^{z}\frac{\tilde{C}}{tA}dt}}{\det(L(z))}\,, \tag{IV.57}$$

com $K_1 = \tilde{w}(z_0)\det(L(z_0))e^{\int_{z_1}^{z_0}\frac{\tilde{C}}{tA}dt}$. Se utilizarmos $\det(L(z)) = \det(L(z_0))$ (cf. lema IV.1) em (IV.57), obtemos (IV.53). □

3.3. Determinação do polinómio $\tilde{C}$.

Resta-nos determinar o polinómio $\tilde{C}$ que define o peso $\tilde{w}$ (e a partir do qual se define a sucessão $\{\tilde{P}_n\}$ em (IV.44)).

PROPOSIÇÃO IV.1. *Considerando as condições do lema anterior, seja F Laguerre-Hahn tal que $zAF' = BF^2 + CF + D$, seja $\tilde{C}$ um polinómio que define um peso $\tilde{w}$ dado por (IV.53), e $\tilde{F}$ a função de Carathéodory associada a $\tilde{w}$. Seja*

$T_{(\alpha_1,-\beta_1;-\alpha_2,\beta_2)}$ *a transformação racional-linear com* $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{P}$, $i = 1, 2$, $\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 \neq 0$, *e tal que* $F = T(\tilde{F})$. *Considere-se a equação diferencial linear de primeira ordem verificada por* $\tilde{F}$,

$$zA\tilde{F}' = \tilde{C}\tilde{F} + \tilde{D}\,,\ \tilde{D} \in \mathbb{P}\,. \tag{IV.58}$$

Então, verificam-se as relações seguintes,

$$B = (\alpha_2\beta_2' - \alpha_2'\beta_2)zA + \alpha_2\beta_2\tilde{C} + \beta_2^2\tilde{D}\,, \tag{IV.59}$$

$$C = (\alpha_2\beta_1' + \alpha_1\beta_2' - \alpha_2'\beta_1 - \alpha_1'\beta_2)zA + (\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1)\tilde{C} + 2\beta_1\beta_2\tilde{D}\,, \tag{IV.60}$$

$$D = (\alpha_1\beta_1' - \alpha_1'\beta_1)zA + \alpha_1\beta_1\tilde{C} + \beta_1^2\tilde{D}\,, \tag{IV.61}$$

onde considerámos, sem perda de generalidade, que $\alpha_2\beta_1 - \alpha_1\beta_2 = 1$.

Demonstração: Do teorema IV.7 temos que F é uma transformação racional de $\tilde{F}$ do tipo indicado.

Se $\tilde{C} \in \mathbb{P}$, pelo corolário anterior conclui-se que $\dfrac{\tilde{w}'}{\tilde{w}} = \dfrac{\tilde{C}}{zA}$, ou seja, o peso $\tilde{w}$ é semi-clássico. Logo, (IV.58) segue-se pelo corolário II.6.

Deduzam-se as equações (IV.59)-(IV.61).

De $F = \dfrac{\alpha_1 - \beta_1\tilde{F}}{-\alpha_2 + \beta_2\tilde{F}}$ obtemos $\tilde{F} = \dfrac{\alpha_1 + \alpha_2 F}{\beta_1 + \beta_2 F}$. Se tivermos em atenção a equação (IV.58), obtemos a seguinte equação para F (cf. teorema II.3),

$$zA(\alpha_2\beta_1 - \alpha_1\beta_2)F' = B_2F^2 + C_2F + D_2\,, \tag{IV.62}$$

com

$$B_2 = (\alpha_2\beta_2' - \alpha_2'\beta_2)zA + \alpha_2\beta_2\tilde{C} + \beta_2^2\tilde{D}\,,$$

$$C_2 = (\alpha_2\beta_1' + \alpha_1\beta_2' - \alpha_2'\beta_1 - \alpha_1'\beta_2)zA + (\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1)\tilde{C} + 2\beta_1\beta_2\tilde{D}\,,$$

$$D_2 = (\alpha_1\beta_1' - \alpha_1'\beta_1)zA + \alpha_1\beta_1\tilde{C} + \beta_1^2\tilde{D}\,.$$

Da compatibilidade entre as equações $zAF' = BF^2 + CF + D$ e (IV.62) obtemos

$$\frac{zA(\alpha_2\beta_1 - \alpha_1\beta_2)}{zA} = \frac{B_2}{B} = \frac{C_2}{C} = \frac{D_2}{D}\,.$$

Se considerarmos, sem perda de generalidade, $\alpha_2\beta_1 - \alpha_1\beta_2 = 1$, obtemos

$$B = B_2,\ C = C_2,\ D = D_2\,,$$

ou seja, obtemos as equações (IV.59)-(IV.61). $\square$

Tendo em atenção o lema anterior e o teorema IV.7, temos que: para cada polinómio $\tilde{C}$ (equivalentemente, para cada função $\tilde{F}$), existe uma única transformação T do tipo racional-linear tal que $F = T(\tilde{F})$; além disso, a proposição anterior permite-nos determinar $\tilde{C}$ através das equações (IV.59)-(IV.61). Mas podemos ainda colocar a questão: sendo $\tilde{C}_1$ e $\tilde{C}_2$ polinómios e $\tilde{F}_1$, $\tilde{F}_2$ as respectivas funções de Carathéodory tais que F é uma transformação racional de $\tilde{F}_i$, para $i = 1, 2$, determinar relações entre $\tilde{C}_1$ e $\tilde{C}_2$. No corolário seguinte damos resposta a esta questão.

COROLÁRIO IV.2. *Considerando as condições do lema (IV.6), seja F Laguerre-Hahn tal que $zAF' = BF^2 + CF + D$. Sejam $\tilde{C}_1, \tilde{C}_2$ polinómios que definem pesos (semi-clássicos) do tipo (IV.53) e sejam F_1 e F_2 as respectivas funções de Carathéodory, não racionais, verificando*

$$zAF_1' = \tilde{C}_1 F_1 + \tilde{D}_1\,, \tag{IV.63}$$

$$zAF_2' = \tilde{C}_2 F_2 + \tilde{D}_2\,. \tag{IV.64}$$

Sejam $T_1 = T_{(\alpha_1,-\beta_1;-\alpha_2,\beta_2)}\,, T_2 = T_{(\gamma_1,-\eta_1;-\gamma_2,\eta_2)}$, as transformações do tipo racional-linear, respectivamente com $\alpha_2\beta_1 - \alpha_1\beta_2 = 1$, $\gamma_2\eta_1 - \gamma_1\eta_2 = 1$, e tal que $T_1(F_1) = F$, $T_2(F_2) = F$. Então, verificam-se as relações seguintes,

$$(\alpha_2\beta_2' - \alpha_2'\beta_2)zA + \alpha_2\beta_2\tilde{C} + \beta_2^2\tilde{D} = (\gamma_2\eta_2' - \gamma_2'\eta_2)zA + \gamma_2\eta_2\tilde{C} + \eta_2^2\tilde{D}\,, \tag{IV.65}$$

$$\begin{aligned}(\alpha_2\beta_1' + \alpha_1\beta_2' - \alpha_2'\beta_1 - \alpha_1'\beta_2)zA + (\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1)\tilde{C} + 2\beta_1\beta_2\tilde{D}\\ = (\gamma_2\eta_1' + \gamma_1\eta_2' - \gamma_2'\eta_1 - \gamma_1'\eta_2)zA + (\gamma_1\eta_2 + \gamma_2\eta_1)\tilde{C} + 2\eta_1\eta_2\tilde{D}\,,\end{aligned} \tag{IV.66}$$

$$(\alpha_1\beta_1' - \alpha_1'\beta_1)zA + \alpha_1\beta_1\tilde{C} + \beta_1^2\tilde{D} = (\gamma_1\eta_1' - \gamma_1'\eta_1)zA + \gamma_1\eta_1\tilde{C} + \eta_1^2\tilde{D}\,. \tag{IV.67}$$

Demonstração: Pela proposição anterior, sendo $F = T_1(F_1)$, temos as equações

$$B = (\alpha_2\beta_2' - \alpha_2'\beta_2)zA + \alpha_2\beta_2\tilde{C} + \beta_2^2\tilde{D}\,,$$

$$C = (\alpha_2\beta_1' + \alpha_1\beta_2' - \alpha_2'\beta_1 - \alpha_1'\beta_2)zA + (\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1)\tilde{C} + 2\beta_1\beta_2\tilde{D}\,,$$

$$D = (\alpha_1\beta_1' - \alpha_1'\beta_1)zA + \alpha_1\beta_1\tilde{C} + \beta_1^2\tilde{D}\,.$$

Por outro lado, se $F = T_2(F_2)$, seguem-se as equações

$$\begin{aligned}
B &= (\gamma_2\eta_2' - \gamma_2'\eta_2)zA + \gamma_2\eta_2\tilde{C} + \eta_2^2\tilde{D}\,,\\
C &= (\gamma_2\eta_1' + \gamma_1\eta_2' - \gamma_2'\eta_1 - \gamma_1'\eta_2)zA + (\gamma_1\eta_2 + \gamma_2\eta_1)\tilde{C} + 2\eta_1\eta_2\tilde{D}\,,\\
D &= (\gamma_1\eta_1' - \gamma_1'\eta_1)zA + \gamma_1\eta_1\tilde{C} + \eta_1^2\tilde{D}\,.
\end{aligned}$$

Logo, obtemos (IV.65)-(IV.67). □

Finalmente, enunciamos o principal resultado desta secção.

TEOREMA IV.8. *Seja F uma função de Carathéodory Laguerre-Hahn que verifica $zAF' = BF^2 + CF + D$, com $A, B, C, D \in \mathbb{P}$, e seja $\{Y_n\}$ a sucessão associada a F dada por (I.25). Então, $\{Y_n\}$ admite a seguinte representação,*

$$Y_n = \begin{bmatrix} \sqrt{\tilde{w}}\tilde{\phi}_n & -\tilde{Q}_n/\sqrt{\tilde{w}} \\ \sqrt{\tilde{w}}\tilde{\phi}_n^* & \tilde{Q}_n^*/\sqrt{\tilde{w}} \end{bmatrix} E_n L^{-1}(z)\,,\ n \in \mathbb{N}\,, \tag{IV.68}$$

onde E_n são as matrizes definidas em (IV.33), $\{\tilde{\phi}_n\}$ é a SPOM relativamente a $\tilde{w}$ dado em (IV.53), $\{\tilde{Q}_n\}$ é a respectiva sucessão das funções de segunda espécie, e L é uma matriz fundamental de soluções de (IV.29).

Demonstração: A representação (IV.68) resulta de (IV.32) e da representação (IV.45) para $\{P_n\}$. □

4. Exemplo

Consideremos $\{\phi_n\}$ a sucessão de polinómios ortogonais de Jacobi sobre $\mathbb{T}$ e, por uma questão de simplicidade de escrita, consideremos os parâmetros $\alpha = \beta$ (cf. secção II.2). Seja $\{\Omega_n\}$ a sucessão de polinómios associados de primeira espécie. Denotemos por $\tilde{F}$ a função de Carathéodory associada a $\{\phi_n\}$ e por F a função de Carathéodory associada a $\{\Omega_n\}$. A função F é Laguerre-Hahn e verifica (cf. secção II.3)

$$z(z^2-1)F' = -2\alpha c_0(z^2-1)F^2 - 2\alpha(z^2+1)F\,, \tag{IV.69}$$

onde c_0 é o momento de ordem zero da medida de Jacobi. Aplicando o lema de Radon, temos que determinar um sistema fundamental de soluções dos sistemas diferenciais seguintes,

$$z(z^2-1)L'(z) = \begin{bmatrix} -\alpha(z^2+1) & 0 \\ -2\alpha c_0(z^2-1) & \alpha(z^2+1) \end{bmatrix} L(z) \tag{IV.70}$$

$$z(z^2-1)P_n' = \mathcal{B}_n P_n\,. \tag{IV.71}$$

No que se segue consideraremos um domínio do plano complexo, G, que não contenha os pontos $z=0, z=1, z=-1$ (ou seja, os zeros do polinómio $z(z^2-1)$), e consideraremos $z_0 \in G$.

4.1. Solução de (IV.70).

LEMA IV.7. *A matriz fundamental de soluções do sistema (IV.70) é dada por*

$$L(z) = z^{-\alpha}(z^2-1)^{\alpha} \\ \times \begin{bmatrix} z^{2\alpha}(z^2-1)^{-2\alpha} & z^{2\alpha}(z^2-1)^{-2\alpha} \\ 1-2\alpha c_0\int_{z_1}^{z} t^{2\alpha-1}(t^2-1)^{-2\alpha}dt & 1-2\alpha c_0\int_{t_2}^{z} t^{2\alpha-1}(t^2-1)^{-2\alpha}dt \end{bmatrix}$$

com $t_1 \neq t_2$.

Demonstração: Se escreveremos $L = \begin{bmatrix} x & y \\ u & v \end{bmatrix}$, o sistema (IV.70) é equivalente às equações seguintes

$$x' = \frac{-\alpha(z^2+1)}{z(z^2-1)}x\,, \tag{IV.72}$$

$$y' = \frac{-\alpha(z^2+1)}{z(z^2-1)}y\,, \tag{IV.73}$$

$$u' = \frac{\alpha(z^2+1)}{z(z^2-1)}u - \frac{2\alpha c_0}{z}x\,, \tag{IV.74}$$

$$v' = \frac{\alpha(z^2+1)}{z(z^2-1)}v - \frac{2\alpha c_0}{z}y\,. \tag{IV.75}$$

Para obter a solução de (IV.72) utilizamos a decomposição

$$\frac{-\alpha(z^2+1)}{z(z^2-1)} = \frac{\alpha}{z} + \frac{-\alpha}{z-1} + \frac{-\alpha}{z+1}\,,$$

e, logo,

$$x(z) = z^{\alpha}(z^2-1)^{-\alpha}\,.$$

A solução de (IV.74) é dada pela soma da solução geral da equação homogénea associada,

$$u_h(z) = z^{-\alpha}(z^2-1)^{\alpha}\,,$$

com uma solução particular da equação completa,

$$u_p(z) = -2\alpha c_0 z^{-\alpha}(z^2-1)^{\alpha}\int_{z_1}^{z} t^{2\alpha-1}(t^2-1)^{-2\alpha}dt\,,$$

donde se obtém

$$u(z) = z^{-\alpha}(z^2-1)^{\alpha}\left(1-2\alpha c_0\int_{z_1}^{z} t^{2\alpha-1}(t^2-1)^{-2\alpha}dt\right)\,.$$

Analogamente se obtêm as soluções de (IV.73) e de (IV.75).

Além disso, para que L seja uma matriz fundamental de (IV.70) num certo domínio G, tem de existir $z_0 \in G$ tal que $\det(L(z_0)) \neq 0$. Uma vez que $\det(L(z))$ é constante,

$$\det(L(z)) = 2\alpha c_0\int_{t_1}^{t_2} t^{2\alpha-1}(t^2-1)^{-2\alpha}dt\,,$$

obtemos que $\det(L(z_0)) \neq 0$ se $t_1 \neq t_2$. $\square$

4.2. Solução de (IV.71).

Vimos já que se existir uma solução de $z(z^2-1)P_n' = \mathcal{B}_n P_n$ da forma (IV.45), $P_n = e^{\int_{z_1}^{z}\frac{\tilde{C}/2}{tA}dt}\begin{bmatrix}\tilde{\phi}_n & -\tilde{Q}_n/\tilde{w}\\ \tilde{\phi}_n^* & \tilde{Q}_n^*/\tilde{w}\end{bmatrix}$, $zA = z(z^2-1)$, com $\tilde{\phi}_n$ ortogonal relativamente a um peso $\tilde{w}$, e $\{\tilde{Q}_n\}$ a sucessão das funções de segunda espécie, então $\tilde{w}$ é dado por $\tilde{w} = Ke^{\int_{z_1}^{z}\frac{\tilde{C}}{tA}dt}$ (cf. lema IV.6), para um polinómio $\tilde{C}$.

Neste caso, temos que F é uma transformação racional de $\tilde{F}$, $F = 1/\tilde{F}$ (cf. secção I.7), com $\tilde{F}$ verificando (cf. secção II.4)

$$z(z^2-1)\tilde{F}' = 2\alpha(z^2+1)\tilde{F} + 2\alpha c_0(z^2-1)\,.$$

Assim, pela proposição IV.1, o polinómio $\tilde{C}$ é dado por $\tilde{C} = 2\alpha(z^2+1)$, donde se segue que $\tilde{w} = \left(\frac{z^2-1}{z}\right)^{2\alpha}$.

Pelo teorema IV.8 temos a seguinte representação para $Y_n = \begin{bmatrix} \phi_n & -\Omega_n \\ \phi_n^* & \Omega_n^* \end{bmatrix}$:

$$Y_n\ K = \begin{bmatrix} \left(\frac{z^2-1}{z}\right)^{\alpha} \tilde{\phi}_n & -\left(\frac{z^2-1}{z}\right)^{-\alpha} \tilde{Q}_n \\ \left(\frac{z^2-1}{z}\right)^{\alpha} (\tilde{\phi}_n)^* & \left(\frac{z^2-1}{z}\right)^{-\alpha} (\tilde{Q}_n)^* \end{bmatrix}$$

$$\times E_n z^{\alpha}(z^2-1)^{-\alpha} \begin{bmatrix} 1 - 2\alpha c_0 \int_{t_2}^{z} t^{2\alpha-1}(t^2-1)^{-2\alpha}dt & -z^{2\alpha}(z^2-1)^{-2\alpha} \\ -1 + 2\alpha c_0 \int_{z_1}^{z} t^{2\alpha-1}(t^2-1)^{-2\alpha}dt & z^{2\alpha}(z^2-1)^{-2\alpha} \end{bmatrix}$$

i.e.,

$$Y_n\ K = \begin{bmatrix} \tilde{\phi}_n & -\left(\frac{z^2-1}{z}\right)^{-2\alpha} \tilde{Q}_n \\ (\tilde{\phi}_n)^* & \left(\frac{z^2-1}{z}\right)^{-2\alpha} (\tilde{Q}_n)^* \end{bmatrix}$$

$$\times E_n \begin{bmatrix} 1 - 2\alpha c_0 \int_{t_2}^{z} t^{2\alpha-1}(t^2-1)^{-2\alpha}dt & -z^{2\alpha}(z^2-1)^{-2\alpha} \\ -1 + 2\alpha c_0 \int_{z_1}^{z} t^{2\alpha-1}(t^2-1)^{-2\alpha}dt & z^{2\alpha}(z^2-1)^{-2\alpha} \end{bmatrix}$$

onde $K = 2\alpha c_0 \int_{t_1}^{t_2} t^{2\alpha-1}(t^2-1)^{-2\alpha}dt$ e E_n são as matrizes definidas em (IV.33), $E_n = (P_n(z_0))^{-1} Y_n(z_0) L(z_0)$.

BIBLIOGRAFIA

[1] L. Ahlfors, *Complex Analysis*, McGraw-Hill International Editions, New York, 1978 (third edition).

[2] M. Alfaro e F. Marcellán, *Recent trends in orthogonal polynomials on the unit circle*, em "Orthogonal Polynomials and their applications", (C. Brezinski, L. Gori e A. Ronveaux Eds.) J.C. Baltzer A.G. Basel IMACS Annals on Computing and Applied Mathematics, **9** (1-4), (1991), 3-14.

[3] M. Alfaro e L. Moral, *Quasi-orthogonality on the unit circle and semi-classical forms*, Portugaliæ Mathematica **51** (1), (1994), 47-62.

[4] R. Álvarez-Nordase e F. Marcellán, *On the "Favard theorem" and its extensions*, J. Comput. Appl. Math. **127** (1-2), (2001), 231-254.

[5] A.I. Aptekarev, A. Branquinho e F. Marcellán, *Toda-Type Differential Equations for the Recurrence Coefficients of Orthogonal Polynomials and Freud Transformation*, J. Comput. Appl. Math. **78** (1997), 139-160.

[6] A.I. Aptekarev, A. Cachafeiro e F. Marcellán, *A scalar Riemann boundary value problem approach to orthogonal polynomials on the circle*, J. Approx. Theory **141** (2006), 174-181.

[7] A. Branquinho, *A note on semi-classical orthogonal polynomials*, Bull. Belg. Math. Soc. **3** (1996), 1-12.

[8] A. Branquinho, *Problemas inversos na teoria dos polinómios ortogonais*, Dissertação de doutoramento, Universidade de Coimbra, 1996.

[9] A. Branquinho, A. Foulquié Moreno, F. Marcellán e M.N. Rebocho, *Coherent pairs of linear functionals on the unit circle*, Pré-publicações do Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra, 07-27 (2007).

[10] A. Branquinho e M.N. Rebocho, *Characterizations of Laguerre-Hahn affine orthogonal polynomials on the unit circle*, J. Comput. Anal. Appl., **10** (2), (2008), 229-242.

[11] A. Branquinho e M.N. Rebocho, *Distributional equation for Laguerre-Hahn functionals on the unit circle*, Pré-publicações do Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra, 07-34 (2007). (aceite para publicação em J. Comput. Appl. Math.)

[12] A. Branquinho e M.N. Rebocho, *Sylvester differential equations in the theory of orthogonal polynomials on the unit circle* (submetido para publicação).

[13] A. Branquinho e M.N. Rebocho, *On differential equations for orthogonal polynomials on the unit circle* (em preparação).

[14] A. Cachafeiro e C. Pérez, *Second degree functionals on the unit circle*, Integral Transforms and Special Functions **15** (4), (2004), 281-294.

[15] A. Cachafeiro e C. Pérez, *A study of the Laguerre-Hahn affine functionals on the unit circle*, J. Comput. Anal. Appl. **6** (2), (2004), 107-123.

[16] C. Carathéodory, *Über den Variabilitätsbereich der Fourierschen Konstanten von positiven harmonischen Funktionen*, Rend. Circ. Mat. Palermo **32** (1911), 193-217.

[17] T. Erdely, S. Geronimo, P. Nevai e J. Zhang, *A simple proof of "Favard's theorem" on the unit circle*, Atti. Sem. Mat. Fis. Univ. Modena **29** (1991), 41-46.

[18] J. Favard, *Cours D'Analyse de l'Ecole Polytechnique*, Tome II, Théorie des équations, Gauthier-Villars, Paris, 1962.

[19] G. Freiling, *A survey of nonsymmetric Riccati equations*, Linear Algebra and Applications 351-352 (2002), 243-270.

[20] M. Foupouagnigni e F. Marcellán, *Characterization of the D_w-Laguerre-Hahn functionals*, J. Difference Eq. Appl. **8** (8), (2002), 689-717.

[21] P. Garcia-Lázaro e L. Moral, *Quasi-orthogonality on Laurent polynomials*, em "Orthogonal Polynomials and their applications", (C. Brezinski, L. Gori e A. Ronveaux Eds.) J.C. Baltzer A.G. Basel IMACS Annals on Computing and Applied Mathematics, **9** (1-4) (1991), 267-274.

[22] J. Geronimus, *On the trignometric moment problem*, Annals of Mathematics **47** (4), (1946), 742-761.

[23] Ya.L. Geronimus, *Polynomials orthogonal on a circle and their applications*, American Mathematical Society Translations, Series 1, Vol. 3, Providence R. I., 1962.

[24] Ya.L. Geronimus, *Polynomials orthogonal on a circle and interval*, vol 18, International Series on Applied Mathematics, Consultants Bureau, New York, 1961.

[25] L. Golinskii e P. Nevai, *Szegő difference equations, transfer matrices and orthogonal polynomials on the unit circle*, Commun. Math. Phys. **223** (2001), 223-259.

[26] U. Grenander e G. Szegő, *Toeplitz forms and their applications*, University of California Press, Berkeley, 1958.

[27] W. Hahn, *On Differential Equations for Orthogonal Polynomials*, Funkcialaj, **21** (1978), 1-9.

[28] W. Hahn, *Über Orthogonalpolynome mit besonderen Eigenschaften*, E.B. Christoffel, P.L. Butzer and F. Feher eds., Birkhauser Verlag, Base, (1981), 182-189.

[29] W. Hahn, *Über differentialgleichungen für orthogonalpolynome*, Monat. Math. **95** (1983), 269-274.

[30] A. Iserles, P.E. Koch, S.P. Norsett e J.M. Sanz-Serna, *On polynomials orthogonal with respect to certain Sobolev inner products*, J. Approx. Theory **65** (1991), 151-175.

[31] M. Ismail e N.S. Witte, *Discriminants and functional equations for polynomials orthogonal on the unit circle*, J. Approx. Theory **110** (2001), 200-228.

[32] G. Jank, *Matrix Riccati Differential Equations*, (A.P. Santana, J.S. Neves e M.P. Oliveira eds.), Textos de Matemática, no. 36, DMUC, 2005.

[33] W.B. Jones, O. Njàstad e W.J. Thron, *Moment theory, orthogonal polynomials, quadrature, and continued fractions associated with the unit circle*, Bull. London Math. Soc. **21** (2), (1989), 113-152.

[34] E. Laguerre, *Sur la réduction en fractions continues d'une fraction qui satisfait à une equation différentielle linéaire du premier ordre dont les coefficients sont rationnels*, *J. Math. Pures Appl.* **1** (4), (1885), 135-165, pp. 685-711, in *Oeuvres*, Vol. II, Chelsea, New--York, 1972.

[35] A.P. Magnus, *Riccati acceleration of the Jacobi continued fractions and Laguerre-Hahn orthogonal polynomials*, 213-230, em "Padé Approximation and its Applications, Proc., Bad Honnef 1983", Lect. Notes in Math. 1071 (H. Werner e H.T. Bunger, eds.), Springer--Verlag, Berlin, 1984.

[36] A.P. Magnus, *Painlevé-type differential equations for the recurrence coefficients of semi-classical orthogonal polynomials*, J. Comput. Appl. Math. **57** (1995), 215-237.

[37] A.P. Magnus, texto disponível em http://www.math.ucl.ac.be/membres/magnus/num3/m3xxx99.pdf.

[38] A.P. Magnus, *Freud equatins for Legendre polynomials on a circular arc and solution of the Grünbaum-Delsarte-Janssen-Vries problem*, J. Approx. Theory **139** (1-2), (2006), 75-90.

[39] F. Marcellán, *Orthogonal polynomials and Toeplitz matrices: some applications*, em "Rational approximation and orthogonal plynomials", Seminario Matemático García Galdeano, Univ. Zaragoza (Ed. M. Alfaro), 1989, 31-57.

[40] F. Marcellán, F. Peherstorfer e R. Steinbauer, *Orthogonality properties of linear combinations of orthogonal polynomials II*, Advances in Computational Mathematics **7** (1997), 401-428.

[41] F. Marcellán e E. Prianes, *Orthogonal polynomials and Stieltjes functions: the Laguerre--Hahn case*, Rend. Mat. Appl. (7) **16** (1996), no. 1, 117-141.

[42] F. Marcellán e E. Prianes, *Perturbations of Laguerre-Hahn linear functionals*. Continued fractions and geometric function theory (CONFUN) (Trondheim, 1997). J. Comput. Appl. Math. **105** (1-2) (1999), 109-128.

[43] F. Marcellán e P. Maroni, *Orthogonal Polynomials on the unit circle and their derivatives*, Constr. Approx. **7** (1991), 341-348.

[44] P. Maroni, *Prolégomènes à l'etude des polynômes orthogonaux semi-classiques*, Ann. Pura Appl. **149** (1987), 165-184.

[45] P. Maroni, *Une théorie algébrique des polynômes orthogonaux. Application aux polynômes orthogonaux semi-classiques*, em "Orthogonal Polynomials and their applications", (C. Brezinski, L. Gori e A. Ronveaux Eds.) J.C. Baltzer A.G. Basel IMACS Annals on Computing and Applied Mathematics, **9** (1-4) (1991), 95-130.

[46] P. Maroni, *Le calcul des formes linéaires et les polynômes orthogonaux semi-classiques*, Lect. Notes in Math. 1329, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1988, 279-290.

[47] P. Maroni, *An introduction to second degree forms*, Adv. Comput. Math. **3**, (1995), 59-88.

[48] A. Martínez Finkelshtein, *Szegő polynomials: a view from the Riemann-Hilbert window*, Electronic Transactions in Numerical Analysis **25** (2006), 369-392.

[49] H. G. Meijer, *Determination of all coherent pairs*, J. Approx. Theory **89** (1997), 321-343.

[50] F. Peherstorfer, *A special class of polynomials orthogonal on the unit circle including the associated polynomials*, Constr. Approx. **12** (2) (1996), 161-185.

[51] F. Peherstorfer e R. Steinbauer, *Characterization of orthogonal polynomials with respect to a functional*, J. Comput. Appl. Math. **65** (1995), 339-355.

[52] C. Pérez, *Polinomios ortogonales de Laguerre-Hahn afín sobre la circunferencia unidad*, Dissertação de doutoramento, Universidade de Vigo, 2002.

[53] J. Radon, *Zum Problem von Lagrange*, Hamburger Math. Einzelschr., **6**, 1928.

[54] M.N. Rebocho, *Problemas de Momentos e Polinómios Ortogonais*, Dissertação de mestrado, Universidade de Coimbra, 2001.

[55] B. Simon, *Analogs of the m-function in the theory of orthogonal polynomials on the unit circle*, J. Comp. Appl. Math. **171** (2004), 1-26.

[56] B. Simon e T. Wolff, *Singular continuous spectrum under rank one perturbation and localization for random Hamiltonians,* Comm. Pure Appl. Math. **39**, (1986), 75-90.

[57] B. Simon, *Orthogonal Polynomials on the Unit Circle. Part 1: Classical Theory*, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ. Volume 54, Part 1. Amer. Math. Soc. Providence, Rhode Island, 2005.

[58] B. Simon, *Orthogonal Polynomials on the Unit Circle. Part 2: Spectral Theory*, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ. Volume 54, Part 2. Amer. Math. Soc. Providence, Rhode Island, 2005.

[59] C. Suárez, *About semi-classical orthogonal polynomials of the class* $(2,2)$, J. Comp. Appl. Math. **131** (2001), 457-472.

[60] G. Szegő, *Orthogonal Polynomials*, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., vol. 23, Providence Rhode Island, 1975 (fourth edition).

[61] C. Tasis, *Propriedades diferenciales de los polinomios ortogonales relativos a la circunferencia unidad*, Dissertação de doutoramento, Universidade de Cantabria, 1989.

[62] S. Verblunsky, *On positive harmonic functions*, Proc. London Math. Soc. **40** (2), (1936), 290-320.

ÍNDICE REMISSIVO